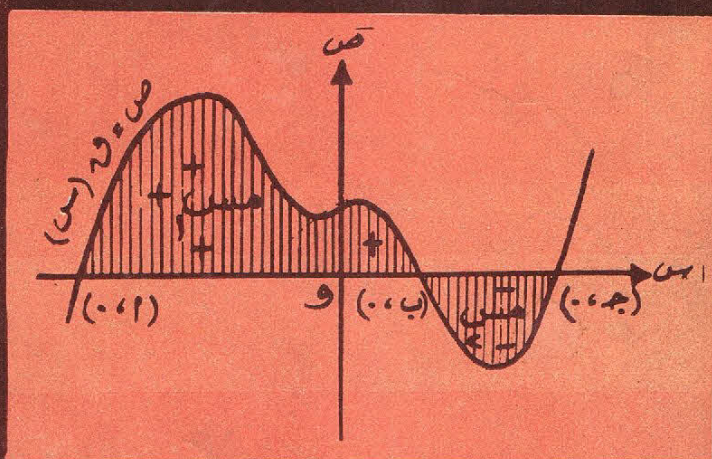
رحيم العزاوي   كامل موسى النصري

تمارين وأمثلة محلولة في

الرياضيات المعاصرة

وافقت مديرية الشؤون الفنية العامة على طبع هذا الكتاب في
٢٤/٢/١٩٧٦ تحت عدد ٤/٥٠/٧٢٩



يشتمل على :

٩٩٥ سؤالاً مع اجوبتها

٣١٥ مثالاً محلولاً

الفصل الرابع
التطبيقات العددية المستمرة

ملاحظات

١) ليكن ق ∈ تط (ك) ، أ ∈ ك

ق مستمر عند أ ⟺ ∀ متتابعة $\langle س_ن \rangle$ على ك متقاربة وغايتها = أ

فان $\langle ق(س_ن) \rangle$ متقاربة و غا $\langle ق(س_ن) \rangle$ = ق (أ)

٢) ليكن ق ∈ تط (ك) ، أ ∈ ك

ق غير مستمر عند أ ⟺ ∃ متتابعة $\langle س_ن \rangle$ على ك متقاربة وغايتها = أ ولكن $\langle ق(س_ن) \rangle$ اما غير متقاربة او متقاربة ولكن غا $\langle ق(س_ن) \rangle$ ≠ ق (أ)

٣) يقال لتطبيق عددي انه مستمر اذا كان مستمرا في كل عنصر من عناصر منطلقه

٤) كل تطبيق عددي كثير الحدود *Polynomial* مستمر ومن هذه الملاحظة نستنتج (١) كل تطبيق عددي ثابت مستمر (٢) كل تطبيق عددي ذاتي مستمر .

٥) ليكن ق : ك ⟶ ح تطبيقا مستمرا عند أ

ل : حـ ⟶ ح تطبيقا بحيث ل (س) = ق (س) ، ∀ س ∈ حـ

علما بان حـ ⊂ ك ، أ ∈ حـ فان التطبيق ل مستمر عند أ

٦) اذا كان كل من ق ، ل ∈ تط (ك) مستمرا عند أ حيث أ ∈ ك فان :

(١) ق ⊕ ل مستمر عند أ (٢) ق ⊙ ل مستمر عند أ

(٣) ق ⊖ ل مستمر عند أ (٤) ق ⊘ ل مستمر عند أ بحيث

ل (س) ≠ صفر ∀ س ∈ ك

امثلة محلولة

١) ليكن ق ∈ تط (ح) بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 & \text{اذا كان } س \leqslant ٣ \\ ٢س + ١ & \text{اذا كان } س > ٣ \end{cases}$$

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدي

(٢) هل يكون ق مستمرا عند ٣ ؟ برهن قولك .

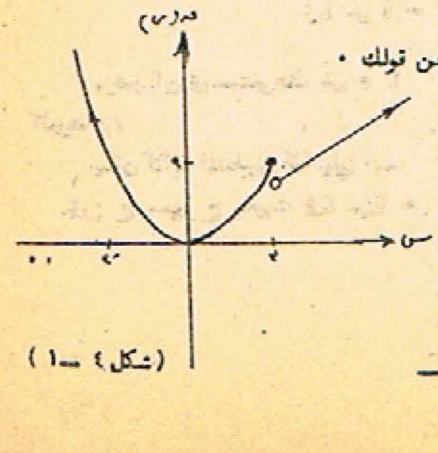
الجواب / ق غير مستمر عند ٣

البرهان/

بما انه ∃ $\langle س_ن \rangle = \langle ٣ + \frac{1}{ن} \rangle$

متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ٣

لكن $\langle ق(س_ن) \rangle$ =



(شكل ٤ ـ ١)

$\langle$ ق $(١ + \frac{1}{ن})$ $\rangle$

$= \langle ٢(٣ + \frac{1}{ن}) + ١ \rangle$

$= \langle ٦ + \frac{٢}{ن} + ١ \rangle = \langle ٧ + \frac{٢}{ن} \rangle$ متقاربة

وغا $\langle$ ق(سن) $\rangle$ = غا $\langle ٧ + \frac{٢}{ن} \rangle$

= غا $\langle ٧ \rangle$ + ٢ غا $\langle \frac{1}{ن} \rangle$ = ٧

وان ق (٣) = ٩

∴ غا $\langle$ ق(سن) $\rangle$ ≠ ق(٣)

∴ ق غير مستمر عند ٣

٢) ليكن ق ∈ تط (ح) بحيث ق(س) = { ٣ ، س ≥ صفر ؛ ٥ ، س < صفر }

برهن ان ق غير مستمر عند س = صفر وارسم ق في المستوى الاقليدي

البرهان/

بما انه ∃ $\langle$ سن $\rangle$ = $\langle$ صفر $- \frac{1}{ن}$ $\rangle$

متتابعة على ح متقاربة

وغا $\langle$ سن $\rangle$ = صفر

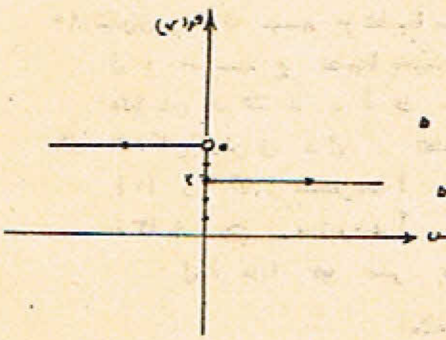
$\langle$ ق(سن) $\rangle$ = $\langle$ ق$(- \frac{1}{ن})$ $\rangle$ = ٥

غا $\langle$ ق(سن) $\rangle$ = غا $\langle ٥ \rangle$ = ٥

ق(صفر) = ٣

∴ غا $\langle$ ق(سن) $\rangle$ ≠ ق(صفر)

∴ ق غير مستمر عند الصفر



(شكل ٤ ـ ٢)

٣) ليكن ق ∈ تط (ح) بحيث

ق(س) = { $\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ اذا كان س ≠ ٢ ؛ ١٢ عندما س = ٢ }

برهن ان ق مستمر عند س = ٢

البرهان/

يمكن كتابة التطبيق كما يلي :-

ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { $\frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}$ ∀ س ≠ ٢ ؛ ١٢ عندما س = ٢ }

اى ق(س) = { س^{٢} + ٢س + ٤ ‏ ∀ س ≠ ٢
‏ ١٢ ‏ عندما س = ٢

∀ ⟨س$_{ن}$⟩ متتابعة على ح متقاربة غايتها = ٢ فان

ق(س$_{ن}$) = ⟨(س$_{ن}$)^{٢} + ٢س$_{ن}$ + ٤⟩ = غا ⟨س$_{ن}$⟩ غا ⟨س$_{ن}$⟩ + ٢غا ⟨س$_{ن}$⟩
+ غا ⟨٤⟩
= ٢ × ٢ + ٢ × ٢ + ٤ = ١٢
وبما ان ق(٢) = ١٢
∴ غا ⟨ق(س$_{ن}$)⟩ = ق(٢)
∴ ق مستمر عند ٢

٤) ليكن ق ∋ تط (ح) بحيث ق(س) = { (س^{٢} + ٣س − ١٠) / (س − ٢) ‏ اذا كان س ≠ ٢
‏ أ ‏ اذا كان س = ٢

حيث أ ∋ ح ، جد قيمة أ التي تجعل ق مستمرا عند س = ٢

الحل/ يمكن كتابة التطبيق كما يلي :-
ق(س) = { ((س + ٥)(س − ٢)) / (س − ٢) ‏ اذا كان س ≠ ٢
‏ أ ‏ اذا كان س = ٢

اى ان ق(س) = { س + ٥ ‏ اذا كان س ≠ ٢
‏ أ ‏ اذا كان س = ٢

ولكي يكون ق مستمرا عند س = ٢ فانه ∀ ⟨س$_{ن}$⟩ متتابعة على ح متقاربة
وغايتها = ٢ فان غا ⟨ق(س$_{ن}$)⟩ = غا ⟨س$_{ن}$ + ٥⟩ = غا ⟨س$_{ن}$⟩
+ غا ⟨٥⟩
= ٢ + ٥ = ٧ = ق(٢) = أ ⟸ أ = ٧

٥) ليكن ق ∋ تط (ح) بحيث
ق(س) = { س (١ + √س^{٢}) / √س^{٢} ‏ س ≠ صفر
‏ ٣ ‏ عندما س = صفر

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدى
(٢) هل يكون ق مستمرا عند الصفر؟ برهن قولك

الحل/ قبل ان نبدا بحل هذا التمرين لنعرف √س^{٢}

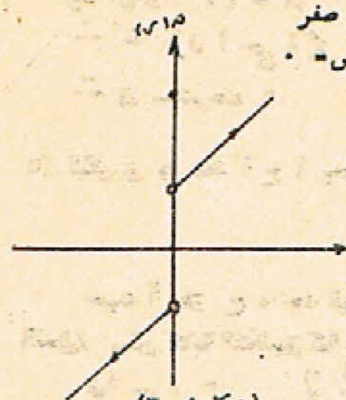
تعريف/ √س^{٢} = { س ‏ اذا كان س ≥ صفر
‏ −س ‏ اذا كان س < صفر

اى ان $|س| = \sqrt{س^2} \quad \forall\, س \in ح$

واستنادا الى هذا التعريف اعلاه سنعيد كتابة التطبيق كما يلي :-

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س(1+س)}{س} & س > \text{صفر} \\ \dfrac{س(1-س)}{-س} & س < \text{صفر} \\ ٣ & \text{عندما } س = \text{صفر} \end{cases}$$

$$\text{اى ان } ق(س) = \begin{cases} 1 + س & س > \text{صفر} \\ س - 1 & س < \text{صفر} \\ ٣ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$$



(شكل ٤ـ٣)

الجواب/ ق غير مستمر عند الصفر

البرهان/ $\exists\ \langle س_ن \rangle = \langle \frac{1}{ن} \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = صفر

$غا \langle ق(س_ن) \rangle = غا \langle ق(\frac{1}{ن}) \rangle$

$= غا \langle 1 + \frac{1}{ن} \rangle = غا \langle 1 \rangle + غا \langle \frac{1}{ن} \rangle$

$= 1 + \text{صفر} = 1$

$ق(\text{صفر}) = ٣$

$\therefore\ غا \langle ق(س_ن) \rangle \neq ق(\text{صفر})$

$\therefore$ ق غير مستمر عند الصفر

٦) ليكن ق $\in$ تط (ح) بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س + 1}{س - 1} & س \neq 1 \\ ٤ & \text{عندما } س = 1 \end{cases}$$

برهن ان ق غير مستمر عند س = ١

البرهان/

$\exists\ \langle س_ن \rangle = \langle 1 + \frac{1}{ن} \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ١

$$\langle ق(س_ن) \rangle = \langle ق(1 + \frac{1}{ن}) \rangle = \left\langle \frac{1 + \frac{1}{ن} + 1}{1 + \frac{1}{ن} - 1} \right\rangle = \left\langle \frac{2 + \frac{1}{ن}}{\frac{1}{ن}} \right\rangle$$

$= \langle ٢ن + ١ \rangle$ غير متقاربة

$\therefore$ ق غير مستمر عند س = ١

٧) ليكن ق : ح $\to$ ح بحيث

$$ق(س) = \begin{cases} \text{صفر} & \text{اذا كان س عددا حقيقيا غير نسبي} \\ ١ & \text{اذا كان س عددا نسبيا} \end{cases}$$

برهن ان ق غيرمستمر

البرهان / ليكن ب عددا نسبيا

$\exists \langle س_{ن} \rangle = \langle ب + \frac{١}{\sqrt{ن}} \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ب

ولتكن $\langle ق(س_{ن}) \rangle = \langle ق(ب + \frac{١}{\sqrt{ن}}) \rangle$ متتابعة

صور حدود المتتابعة $\langle س_{ن} \rangle$ بفعل التطبيق ق •

ولنكتب الحدود التسعة الاولى من هذه المتتابعة

اى $\langle ق(س_{ن}) \rangle = \langle$ ق(ب + ١) ، ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ، ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٣}}$) ،

ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٤}}$) ، ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٥}}$) ، ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٦}}$) ، ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٧}}$) ،

ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٨}}$) ، ق(ب + $\frac{١}{\sqrt{٩}}$) ، ـــــ $\rangle$

$= \langle$ ١ ، ٠ ، ٠ ، ١ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ١ ، ... $\rangle$

وبما ان هذه المتتابعة غير متقاربة

∴ ق غير مستمر في ب

∴ ق غير مستمر •

٨) ليكن ق $\in$ تط (ح) بحيث ق (س) = $س^{٣}$ • برهن ان ق مستمر باستخدام التعريف •

البرهان/

ليكن ب $\in$ ح

∴ $\forall \langle س_{ن} \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = ب

غا $\langle ق(س_{ن}) \rangle$ = غا $\langle (س_{ن})^{٣} \rangle$ = غا $\langle س_{ن} \rangle$ • غا $\langle س_{ن} \rangle$ • غا $\langle س_{ن} \rangle$

= ب • ب • ب = $ب^{٣}$

وبما ان ق (ب) = $ب^{٣}$

∴ غا $\langle ق(س_{ن}) \rangle$ = ق(ب)

∴ ق مستمر عند ب

ولكننا اخذنا ب اى عنصر من عناصر ح وكان ق مستمرا في ب

∴ ق مستمر

٩) ليكن ق $\in$ تط (ك) بحيث :-

ق (س) = $\begin{cases} \frac{س - |س|}{س} & \text{اذا كان س < صفر} \\ ٢ & \text{عندما س = صفر} \end{cases}$

حيث ك مجموعة الاعداد الحقيقية غير الموجبة

برهن ان ق مستمر

البرهان/ استنادا الى تعريف القيمة المطلقة نعيد كتابة التطبيق كما يلي :-

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س - (-س)}{س} & س < صفر \\ ٢ & \text{عندما } س = صفر \end{cases}$$

$$اى\ ان\ ق(س) = \begin{cases} ٢ & س < صفر \\ ٢ & \text{عندما } س = صفر \end{cases}$$

اى ان ق (س) = ٢ $\forall$ س $\leq$ صفر

وبما ان هذا التطبيق ثابت $\forall$ س $\in$ منطلقة

$\therefore$ ق مستمر (كل تطبيق عددى ثابت مستمر)

١٠) ليكن ق : ح $\leftarrow$ ح بحيث ق(س) = $\left[\dfrac{س}{٤}\right]$

ولتكن أ = $\{$ س : س $\in$ ص ، س يقبل القسمة على ٤ $\}$

برهن ان ق غير مستمر في أ

البرهان / ليكن هـ $\in$ أ

$\exists \langle س_ن \rangle = \langle هـ - \dfrac{1}{ن} \rangle$ متتابعة على ح متقاربة وغايتها = هـ

$$\langle ق(س_ن) \rangle = \langle ق\left(\dfrac{هـ - \frac{1}{ن}}{٤}\right) \rangle = \langle \left[\dfrac{هـ - \frac{1}{ن}}{٤}\right] \rangle$$

$$= \langle \left[\dfrac{هـ}{٤} - \dfrac{1}{٤ن}\right] \rangle = \langle \dfrac{هـ}{٤} - ١ \rangle$$

$\therefore$ غا $\langle ق(س_ن) \rangle$ = غا $\langle \dfrac{هـ}{٤} - ١ \rangle = \dfrac{هـ}{٤} - ١$

بينما ق(هـ) = $\left[\dfrac{هـ}{٤}\right] = \dfrac{هـ}{٤}$ ،

$\therefore$ غا $\langle ق(س_ن) \rangle \neq ق(هـ)$

$\therefore$ ق غير مستمر عند س = هـ

وبما اننا اخذنا هـ اى عنصر من عناصر أ بدون تعيين

$\therefore$ ق غير مستمر في كل عنصر من عناصر أ

$$١١)\ ليكن\ ق : ح \leftarrow ح\ بحيث\ ق(س) = \begin{cases} \dfrac{1}{س} & \forall س > ٠ \\ -\dfrac{1}{س} & \forall س < ٠ \\ ٤ & \text{اذا كانت } س = ٠ \end{cases}$$

١) مثل ق ديكارتيا
٢) هل يكون ق متناظرا مع المحور الثاني ؟ برهن قولك
٣) هل يكون ق محدودا من الاسفل؟ برهن قولك
٤) برهن ان ق غير مستمر عند الصفر

الحل/

٢) ق متناظر بالنسبة للمحور الثاني لانه
$\forall$ (أ، ب) $\in$ ق فان (ـ أ ، ب) $\in$ ق

٣) بما انه $\forall$ س > ٠ فان $\frac{١}{\text{س}}$ > ٠ $\Longleftarrow$

ق(س) > صفر ، وبما انه $\forall$ س < ٠

فان $\frac{١}{\text{س}}$ < ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{-١}{\text{س}}$ > صفر $\Longleftarrow$

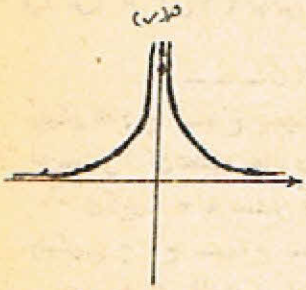
ق(س) > ٠

وبما ان ق (صفر) = ٤ ، اى ان

ق(س) > صفر

$\therefore$ ق(س) > صفر $\forall$ س $\in$ ح

$\therefore$ ق محدود من الاسفل



شكل (٤ ـ ٤)

٤) بما انه $\exists$ ⟨س$_{ن}$⟩ = ⟨صفر + $\frac{١}{\text{ن}}$⟩ متتابعة على ح متقاربة

وغايتها = صفر وان ⟨ق(س$_{ن}$)⟩ = ⟨ق($\frac{١}{\text{ن}}$)⟩ = ⟨ ن ⟩

غير متقاربة

$\therefore$ ق غير مستمر عند الصفر

١٢) ليكن ق $\in$ تط (ح) بحيث ق(س) = |س ـ ١| ـ |س| + |٢س + ٣|

برهن ان ق مستمر ، وارسم ق في المستوى الاقليدى

البرهان/ |س ـ ١| = ٠ $\Longleftarrow$ س = ١

|س| = ٠ $\Longleftarrow$ س = ٠

|٢س + ٣| = ٠ $\Longleftarrow$ س = $\frac{-٣}{٢}$



$$\text{اى ان ق (س) } = \begin{cases} -٢\text{س} - ٢ & \text{س} < \frac{-٣}{٢} \\ ٢\text{س} + ٤ & \text{س} \in [\frac{-٣}{٢} \text{ ، } ٠[\\ ٤ & \text{س} \in [٠ \text{ ، } ١[\\ ٢\text{س} + ٢ & \text{س} \geqslant ١ \end{cases}$$

ليكن ل : ح ← ح بحيث ل (س) = ــ٢س ــ٢

ل مستمر (كثير الحدود)

∴ ق(س) = ــ٢س ــ٢ مستمر ∀ س < $\frac{-3}{2}$

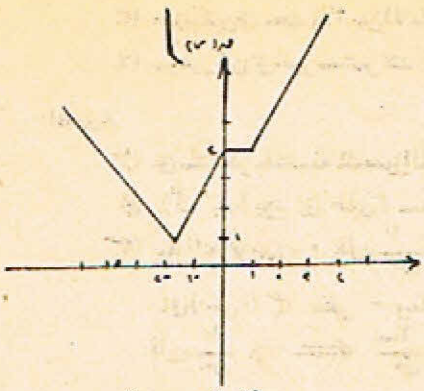
(ملاحظة ٥) ... (١)

وليكن ع : ح ← ح بحيث ع (س) = ٢س + ٤

ع مستمر (كثير الحدود)

∴ ق(س) = ٢س + ٤ ∀ س ∋]$\frac{-3}{2}$ ، ٠[

--- (٢)



شكل (٤ ــ ٥)

وليكن ك : ح ← ح بحيث ك (س) = ٤

ك مستمر (كل تطبيق عددي ثابت مستمر)

∴ ق(س) = ٤ مستمر ∀ س ∋]٠ ، ١[... (٣)

وليكن م : ح ← ح بحيث م (س) = ٢س + ٢

م مستمر (كثير الحدود) مستمر

∴ ق(س) = ٢س + ٢ ∀ س ≥ ١ ... (٤)

من (١) و (٢) و (٣) و (٤) نستنتج ان

ق مستمر

(يكون التطبيق مستمرا اذا كان مستمرا في كل عنصر من عناصر منطلقة)

١٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س٢ ــ ١

وليكن ل : ح ← ح بحيث ل (س) = س٢ + ١

برهن ان كلا من التطبيقات التالية مستمر

(١) ق ⊕ ل (٢) ق ⊖ ل (٣) ق ⊙ ل (٤) ق ⨸ ل

(٥) (٧ ق)

البرهان/ بما ان ق تطبيق كثير الحدود فهو مستمر (كل تطبيق كثير الحدود مستمر)

كذلك ل تطبيق كثير الحدود فهو مستمر (نفس السبب)

وبالاستناد الى الملاحظة (٦) ص فان كلا من ق ⊕ ل ، ق ⊙ ل ،

ق ⊖ ل ، ق ⨸ ل ، (٧ق) مستمر

تماريـــــن

١) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق (س) = $\begin{cases} \frac{س + ٢}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٣ & عندما\ س = ١ \end{cases}$

برهن ان ق غير مستمر عند س = ١

٢) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { س^٢ ∀ س ≥ صفر ، ٣ − س^٢ ∀ س < صفر

هل يكون ق مستمرا عند الصفر ؟ برهن قولك

٣) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { س اذا كان س عدد حقيقي غير صحيح ، صفر اذا كان س عدد صحيح .

هل يكون ق مستمرا ؟ برهن قولك

٤) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { (س^٢ − ١) / (س − ١) اذا كان س ≠ ١ ، ٢ عندما س = ١ .

١) هل يكون ق مستمرا عند ٢ ؟ برهن قولك

٢) هل يكون ق مستمرا عند ١ ؟ برهن قولك

٥) ليكن ق : [٠ ، ٢] ← ح بحيث ق(س) = { ٢س اذا كان س ∈ [٠ ، ١] ، ٣ − س اذا كان س ∈]١ ، ٢]

١) مثل ق ديكارتيا

٢) هل يكون ق مستمرا ؟ برهن قولك

٦) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { س^٢ ∀ س > صفر ، ٣ − س^٢ ∀ س ≤ صفر

هل يكون ق مستمرا عند الصفر ؟ برهن قولك

٧) ليكن ق : ح^+ ← ح بحيث ق(س) = √س

برهن ان ق مستمرا . وارسم المخطط الديكارتي للتطبيق .

٨) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س − [س]

برهن ان ق غير مستمر في كل عدد صحيح وارسم ق في المستوى الاقليدى

٩) ليكن ق ∈ تط (ك) وان ق غير مستمر ، وليكن ل ∈ تط (ك) وان ل غيـــر مستمر فهل من الضروري ان يكون

(١) ق ⊕ ل غير مستمر (٢) ق ⊙ ل غير مستمر (٣) ق ⊘ ل غير مستمر

بشرط ل(س) ≠ صفر ∀ س ∈ ك . برهن قولك في كل حالــة .

١٠) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { (س^٢ − ٤) / (س − ٢) س ≠ ٢ ، أ عندما س = ٢

حيث أ ∈ ح

جد قيمة أ التي تجعل ق مستمرا عند ٢

١١) اذا كان ق مستمرا عند أ وكان ق(أ) ≠ صفر فان (١ / ق) مستمر عند أ

١٢) اذا كان ق مستمرا عند أ وكان ل مستمرا عند أ فبرهن ان ق ∘ ل مستمراً عندأ

١٣) ليكن

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 1 & \text{اذا كان س} \geq 0 \\ -1 & \text{اذا كان س} < 0 \end{cases}$$

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} 1 & \text{اذا كانت س}^2 = 1 \\ \text{صفر} & \text{اذا كانت س}^2 \neq 1 \end{cases}$$

برهن ان ل ∘ ق مستمر عند الصفر وكذلك برهن ان ق غير مستمر عند الصفر وان ل غير مستمر عند ١ .

١٤) اذا كان ق (س) = س − ل (س)

$$\text{حيث ل}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} \cdot \text{ع}(\text{س}) & \text{اذا كان س} \neq \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{اذا كان س} = \text{صفر} \end{cases}$$

وان ع : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ع (س) = عَ $\left(\frac{1}{\text{س}}\right)$

وان عَ(س) = (س − [س]) ∧ ([س + ١] − س)

حيث أ ∧ ب ⟺ اصغر العددين أ او ب

هل يكون ق مستمرا عند الصفر؟ برهن قولك .

$$\text{١٥) ليكن ق : ح} \longrightarrow \text{ح بحيث ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} & \text{س} \geq \text{صفر} \\ -\sqrt{-\text{س}} & \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

هل يكون ق مستمرا عند الصفر؟ برهن قولك

$$\text{١٦) ليكن ق : }]-1 , 1[\longrightarrow \text{ح بحيث ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + 1 & \text{اذا كان } -1 < \text{س} \leq 0 \\ -\text{س} & \text{اذا كان } 0 < \text{س} < 1 \end{cases}$$

برهن ان ق غير مستمر عند الصفر وان ق يمتلك اعظم واوطأ قيمة .

$$\text{١٧) ليكن ق : ح} \longrightarrow \text{ح بحيث ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\text{س}} & \forall \text{ س} \in \text{ح} / \{0 , 1\} \\ \text{س} & \text{اذا كان س} \in \{0 , 1\} \end{cases}$$

١) مثل كلا من ق ، ق ∘ ق ، ق ∘ ق ∘ ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق غير مستمر عند س = ١

٣) برهن ان ق ∘ ق غير مستمر عند الصفر

٤) برهن ان ق ∘ ق ∘ ق مستمر

١٨) ليكن ق : ح /]−٢ ، ٢[⟵ ح بحيث ق (س) = $4 - \text{س}^2$

مثل ق ديكارتيا وبرهن انه مستمر في منطلقه

١٩) اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =
أس٢ + بس − ٤ ∀ س ∈]−٢ ، ١]
٢س − ٥ س > ١
بس٢ + س + ٢ س ≤ −٢

وكان ق مستمرا فجد قيمة كل من أ ، ب ثم مثل ق ديكارتيا وبرهن انه متزايد في
ح /]−٢ ، ٠]
الجواب [أ = ١ ، ب = صفر .]

٢٠) ليكن م =]−١ ، ١[، ولتكن ن =]٣ ، ٥]
وليكن ق (س) =
١٠ − ٦س ∀ س ∈ م
٢س − ٦ ∀ س ∈ ن
أس٣ + بس٢ + حـس + د ∀ س ∈ ح /(م ∪ ن)

حيث أ ، ب ، حـ ، د ∈ ح
واذا كان ق تطبيقا مستمرا فاجب عن الاسئلة التالية :-
١) جد قيم أ ، ب ، حـ ، د
٢) مثل ق ديكارتيا
٣) هل يكون ق محددا ؟ برهن قولك
٤) برهن ان (ق ∘ ق ∘ ق) (٣) = ١٦٩
الجواب أ = ٠ ، ب = ١ ، حـ = −٦ ، د = ٩ .

٢١) ليكن ق :]−٤ ، ٦] ⟵ ح بحيث ق(س) =
[س/٢] + ٢ ∀ س ∈ [٠ ، ٢[
س + ٢ ∀ س ∈]−٤ ، ٠[
|س − ٤| ∀ س ∈ [٢ ، ٦]

١) مثل ق ديكارتيا (٢) برهن ان ق مستمر
٣) جد اوطا قيمة للتطبيق ق واوطا قيمة للتطبيق ⊖ ق)
٤) برهن ان ق محدود
٥) جد المساحة المحددة بين بيان التطبيق ق والمحور الاول والمحددة بنقاط التقاطع معه .

الفصل الخامس
غاية التطبيقات العددية

بند ٥ـ١

تعريف (٥ـ١) العناصر: الملازمة (الملاصقة) لمجموعة عددية

لتكن ك مجموعة جزئية من ح غير خالية وليكن أ ∈ ح

١) أ ملاصق الى ك ⟺ ∃ ⟨مـن⟩ متتابعة في ك / {أ} متقاربة وغايتها = أ

٢) أ ليس ملاصقا الى ك ⟺ (∀ ⟨مـن⟩) اذا كانت ⟨مـن⟩ في ك / {أ}
فان ⟨مـن⟩ ⟶̸ أ

ملاحظات (٥ـ١)

١) ليس من الضروري ان يكون هناك عنصر ملاصق لكل مجموعة
فمثلا المجموعة ك = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ..... ، ٢ن ، ...} لايوجد عنصر ملاصق لها مثل أ والسبب في ذلك انه لاتوجد متتابعة في المجموعة ك / {أ} ولها غاية

٢) اذا كانت ك مجموعة من الاعداد الحقيقية وكان أ ملاصق لها فليس من الضروري أن أ ∈ ك

٣) قد يوجد اكثر من عنصر ملاصق لمجموعة

٤) كل عنصر ∈ [أ ، ب] عنصرا ملاصقا لـ] أ ، ب [

٥) كل عنصر في ح هو ملاصق الى ح

تعريف (٥ـ٢)

ليكن ق ∈ تط (ك) ، أ ملاصق الى ك ، ل ∈ ح

ل غاية ق عند أ ⟺ (∀ ⟨مـن⟩) (اذا كان ⟨مـن⟩ متتابعة في ك / {أ} متقاربة وغايتها = أ فان ⟨ق(مـن)⟩ متقاربة وغايتها = ل

ويرمز للعبارة غاية ق عند أ تساوي ل باختصار

غا ق = ل او غا ق (س) = ل
(أ تحت غا في الاولى ، س ⟵ أ تحت غا في الثانية)

تعريف (٥ـ٣)

ليكن ق ∈ تط ك ، أ ملاصق الى ك ، ل ∈ ح

ل ليست غاية للتطبيق ق عند أ ⟺ ∃ ⟨مـن⟩ متتابعة في ك / {أ} متقاربة وغايتها = أ لكن ⟨ق(مـن)⟩ اما غير متقاربة او متقاربة وغايتها ≠ ل حيث ل عددا حقيقيا وحيدا

ملاحظات (٥ ـ ٢)

١) ليكن أ ملاصقا الى ك ، ق ∈ تط (ك)
ق مستمر عند أ ⟺ غا ق = ق (أ) (أ تحت غا)

٢) غاية التطبيق وحيدة

٣) غاية التطبيق الثابت هو العدد الثابت نفسه

٤) اذا كان ق (س) = س ، فان $\underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} = \text{أ}$

٥) ليكن ك مجموعة جزئية من ح غير خالية ∴ أ عنصراً ملاصقاً الى كل من ك ، ك/{أ}

ولتكن هـ : ك/{أ} $\longrightarrow$ ح ، ل : ك $\longrightarrow$ ح

فاذا كان ق(س) = ع (س) $\forall$ س $\in$ ك/{أ} وكان $\underset{أ}{\text{غا}}\text{ع} = \text{ل}$ حيث

ل $\in$ ح فان $\underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} = \text{ل}$ ايضا

٦) ونتيجة للملاحظة الخامسة :

ليكن أ $\in$ ح ، ن $\in$ ط

ق : ح/{أ} $\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$ فان $\underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$

٧) اذا كان ن $\in$ ط^{+} ، أ > صفر ،

ق : ح^{+} $\longrightarrow$ ح بحيث ق(س) = $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}}$ فان $\underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$

٨) لتكن ك $\subset$ ح غير خالية ، أ ملاصق الى ك

ولتكن كل من ق ، ع $\in$ تط (ك) ، وكانت $\underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} = \text{ل}_{١}$ ، $\underset{أ}{\text{غا}}\text{ع} = \text{ل}_{٢}$

فان :

(١) $\underset{أ}{\text{غا}}(\text{ق} \oplus \text{ع}) = \underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} + \underset{أ}{\text{غا}}\text{ع} = \text{ل}_{١} + \text{ل}_{٢}$

(٢) $\underset{أ}{\text{غا}}(\text{ق} \odot \text{ع}) = \underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} \cdot \underset{أ}{\text{غا}}\text{ع} = \text{ل}_{١} \cdot \text{ل}_{٢}$

(٣) $\underset{أ}{\text{غا}}(\text{ق} \oslash \text{ع}) = \dfrac{\underset{أ}{\text{غا}}\text{ق}}{\underset{أ}{\text{غا}}\text{ع}} = \dfrac{\text{ل}_{١}}{\text{ل}_{٢}}$

بشرط $\text{ل}_{٢} \neq$ صفر

(٤) $\underset{أ}{\text{غا}}(\text{حـ}\,\text{ق}) = \text{حـ}\,\underset{أ}{\text{غا}}\text{ق} = \text{حـ}\,\text{ل}_{١}$ حيث حـ $\in$ ح

امثلة محلولة

١) ليكن ق :]−٤ ، ٦[$\longrightarrow$ ح بحيث ق (س) = $٥\text{س}^{٢} - ٢$

(١) برهن ان كلا من −٤ ، ١ ، صفر عنصراً ملاصقاً الى]−٤ ، ٦[

(٢) جد $\underset{-٤}{\text{غا}}\text{ق}$

الحل/ لتكن ك = [ـ ٤ ، ٦]

أ) بما ان ∃ ⟨م ن⟩ = ⟨ـ ٤ + $\frac{١}{ن}$⟩ متتابعة في ك / {ـ ٤} متقاربة
وغايتها = ـ ٤

∴ ـ ٤ عنصراً ملاصق الى ك

ب) بما ان ∃ ⟨م ن⟩ = ⟨١ + $\frac{١}{ن}$⟩ متتابعة في ك / {١} متقاربـــــة
وغايتها = ١

∴ ١ عنصراً ملاصق الى ك

جـ) بما ان ∃ ⟨م ن⟩ = ⟨$\frac{١}{ن}$⟩ متتابعة وغايتها = صفر

∴ صفر عنصراً ملاصق الى ك

٢) ∀ ⟨م ن⟩ متتابعة في ك / {ـ ٤} متقاربة وغايتها = ـ ٤ فان ⟨ق(م ن)⟩ =
⟨٥ (م ن)^{٢} ـ ٢⟩

∴ غا ⟨ق(م ن)⟩ = غا ⟨٥(م ن)^{٢} ـ ٢⟩ = ٥ غا ⟨م ن⟩ ⋅
غا ⟨م ن⟩ ـ غا ⟨٢⟩

= ٥ (ـ ٤) (ـ ٤) ـ ٢ = ٧٨

مثال ٢) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & س \neq ٢ \\ ٢ & عندما\ س = ٢ \end{cases}$

جد غا ق
٢

الحل/ ∀ ⟨م ن⟩ متتابعة في ح / {٢} متقاربة وغايتها = ٢ فان
غا ⟨ق(م ن)⟩ = غا ⟨(م ن)^{٣} + ٢⟩ = غا ⟨م ن⟩ ⋅ غا ⟨م ن⟩ ⋅
غا ⟨م ن⟩ + غا ⟨٢⟩
= ٢ × ٢ × ٢ + ٢ = ١٠

∴ غا ق = ١٠
٢

مثال ٣) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = $\begin{cases} \frac{٣س + ٢}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٣ & عندما\ س = ٢ \end{cases}$

برهن انه ليس للتطبيق غاية عند ٢ ⋅ ثم جد غـــا ق
ـ١

∃ ⟨م ن⟩ = ⟨٢ + $\frac{١}{ن}$⟩ متتابعة متقاربة في ح / {٢} وغايتها = ٢

لكن ⟨ق(م ن)⟩ = ⟨$\frac{٣ م ن + ٢}{م ن - ٢}$⟩ = ⟨$\frac{٣ (٢ + \frac{١}{ن}) + ٢}{٢ + \frac{١}{ن} - ٢}$⟩ = ⟨$\frac{٨ + \frac{٣}{ن}}{\frac{١}{ن}}$⟩

⟨٨ ن + ٣⟩ غير متقاربة

(لان التطبيق ق : ط$^{+}$ ⟵ ح بحيث ق$_{ن}$ = ٨ ن + ٣ غير محدد مــــن
الاعلى)

∴ ليس للتطبيق غاية عند ٢

∵ غا (س ـ ٢) $\neq$ صفر
ـ١

$$\therefore \underset{-1}{\text{غا}} \frac{\text{٣س} + ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{\underset{-1}{\text{غا}}(\text{٣س} + ٢)}{\underset{-1}{\text{غا}}(\text{س} - ٢)} = \frac{\text{٣ غا س} + \text{غا ٢}}{\text{غا س} - \text{غا ٢}} = \frac{٣(-١) + ٢}{-١ - ٢}$$

$$= \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \underset{-1}{\text{غا ق}} = \frac{١}{٣} \quad \left(\underset{أ}{\text{غا}} \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{\underset{أ}{\text{غا ق}_1}}{\underset{أ}{\text{غا ق}_2}} \text{ ، } \underset{أ}{\text{غا ق}_2} \neq \text{صفر} \right)$$

مثال ٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{|\text{س} - ١|}{\text{س} - ١} + \text{٤س} & \text{س} \neq ١ \\ ١ & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$$

برهن انه ليس للتطبيق غاية عند س = ١

البرهان/ استنادا الى تعريف القيمة المطلقة يمكن كتابة التطبيق بالشكل الاتي :-

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} ١ + \text{٤س} & \text{س} \quad ١ \\ -١ + \text{٤س} & \text{س} \quad ١ \\ ١ & \text{عندما س} = ١ \end{cases}$$

∃ ⟨م ن⟩ = ⟨ ١ + $\frac{١}{ن}$ ⟩ متتابعة في ح / {١} متقاربة وغايتها = ١

وان غا ⟨ق(١ + $\frac{١}{ن}$)⟩ = غا ⟨١ + ٤ (١ + $\frac{١}{ن}$)⟩ = ٥

اى ان ق(س) ⟵ ٥ عندما س ⟵ ١ من جهة اليمين

ويرمز الى هذه الحالة $\underset{\text{س} \to ١}{\text{غا ق}_+}$ = ٥

كذلك ∃ ⟨س ن⟩ = ⟨١ ـ $\frac{١}{ن}$⟩ متتابعة في ح / {١} متقاربة وغايتها = ١

وان غا ⟨ق(١ ـ $\frac{١}{ن}$)⟩ = غا ⟨ ـ١ + ٤ (١ ـ $\frac{١}{ن}$)⟩ = ٣

اى ان ق(س) ⟵ ٣ عندما س ⟵ ١ من جهة اليسار ويرمز الى هذه الحالة

$\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{غا ق}}$ = ٣

وبما ان $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{غا ق}} \neq \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{غا ق}}$ اى الغاية من اليمين موجودة وكذلك الغاية من اليسار لكن غير متساويتين

∴ ليس للتطبيق غاية عند ١

مثال ٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^{٢} + ١ & \text{س} > ٢ \\ ٣ - \text{س}^{٢} & \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

برهن انه ليس للتطبيق غاية عند س = ٢

البرهان/

$\exists \langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle = \langle ٢ + \frac{١}{\text{ن}} \rangle$ متتابعة متقاربة في ح / {٢} وغايتها = ٢

وان $\text{غا} \langle \text{ق}(٢ + \frac{١}{\text{ن}}) \rangle = \text{غا} \langle ٢(٢ + \frac{١}{\text{ن}})^{٢} + ١ \rangle$

$= \text{غا} \langle ٢(٤ + \frac{٤}{\text{ن}} + \frac{١}{\text{ن}^{٢}}) + ١ \rangle = ٩$

$\therefore \text{غا}_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق} = ٩$

كذلك $\exists \langle \text{س}_{\text{ن}} \rangle = \langle ٢ - \frac{١}{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في ح / {٢} متقاربة وغايتها = ٢

وان $\text{غا} \langle \text{ق}(٢ - \frac{١}{\text{ن}}) \rangle = \text{غا} \langle ٣ - (٢ - \frac{١}{\text{ن}})^{٢} \rangle = -١$

$\therefore \text{غا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق} = -١$

$\therefore \text{غا}_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق} \neq \text{غا}_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}$ ∴ ليس للتطبيق غاية عند ٢

مثال ٦) ليكن ق : ح ← ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٤} + ٣}$

جد $\text{غا}_{٢} \text{ق}$ ، $\text{غا}_{-٣} \text{ق}$

الحل / برهن ان ق مستمر

$\therefore \text{غا}_{-٣} \text{ق} = \frac{\text{غا}_{-٣}(\text{س}^{٢} + ٥)}{\text{غا}_{-٣}(\text{س}^{٤} + ٣)} = \frac{١٤}{٨٤} = \frac{١}{٦}$

٢) وكذلك $\text{غا}_{٢} \text{ق} = \text{ق}(٢) = \frac{٤ + ٥}{١٦ + ٥} = \frac{٩}{٢١} = \frac{٣}{٧}$

مثال ٧) ليكن ق : ح / {−٢} ← ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س} + ٢}$

هل توجد $\text{غا}_{-٢} \text{ق}$ ؟ برهن قولك ثم جد $\text{غا}_{٢} \text{ق}$

البرهان/

$\exists \langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle = \langle -٢ + \frac{١}{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في ح / {−٢} متقاربة وغايتها = −٢

لكن $\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle = \left\langle \text{ق}\left(-٢ + \frac{١}{\text{ن}}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\left(-٢ + \frac{١}{\text{ن}}\right)^{٢} + ٤}{\left(-٢ + \frac{١}{\text{ن}}\right) + ٢} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{٤ - \frac{٤}{\text{ن}} + \frac{١}{\text{ن}^{٢}} + ٤}{\frac{١}{\text{ن}}} \right\rangle = \left\langle ٨\text{ن} - ٤ + \frac{١}{\text{ن}} \right\rangle$ غير متقاربة

(لان التطبيق ق : $\text{ط}^{+} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}_{\text{ن}} = ٨\text{ن} - ٤ + \frac{١}{\text{ن}}$ غير محدود)

∴ ليس للتطبيق غاية عند س = -٢

$\underset{٢}{\text{غا}}\ \text{ق} = \underset{٢}{\text{غا}} \frac{\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س} + ٢} = \frac{\underset{٢}{\text{غا}}(\text{س}^{٢} + ٤)}{\underset{٢}{\text{غا}}(\text{س} + ٢)} = \frac{٨}{٤} = ٢$

لان ق مستمر عند (٢) وان $\underset{٢}{\text{غا}}(\text{س} + ٢) \neq$ صفر

مثال ٨) ليكن ق : $[\text{صفر} ، ٢] \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & \forall\ \text{س} \in [٠ ، ١[\\ ٣ - \text{س} & \forall\ \text{س} \in\ ]١ ، ٢] \end{cases}$

جد $\underset{١}{\text{غا}}\ \text{ق}$

(١) $\forall \langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في $[٠ ، ١[$ متقاربة وغايتها = ١

فان $\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle = \langle ٢(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle$

$\text{غا} \langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle = ٢\ \text{غا} \langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle = ٢ \times ١ = ٢$

∴ $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{غا}}\ \text{ق} = ٢$

(٢) $\forall \langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle$ متتابعة في $]١ ، ٢]$ متقاربة وغايتها = ١ فان

$\langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle = \langle ٣ - \text{م}_{\text{ن}} \rangle$

$\text{غا} \langle \text{ق}(\text{م}_{\text{ن}}) \rangle = \text{غا}(٣) - \text{غا} \langle \text{م}_{\text{ن}} \rangle = ٣ - ١ = ٢$

∴ $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{غا}}\ \text{ق} = ٢$

∴ $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{غا}}\ \text{ق} = \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{غا}}\ \text{ق} = ٢$

ويمكن ايجاد الغاية كما يلي :-

$\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{غا}}\ \text{ق} = \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{غا}}(٣ - \text{س}) = \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{غا}}\ ٣ - \underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{غا}}\ \text{س} = ٣ - ١ = ٢$

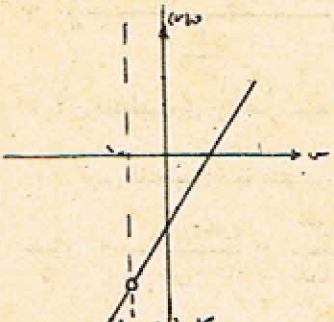
$\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{غا}}\ \text{ق} = \underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{غا}}(٢\text{س}) = ٢\ \underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{غا}}\ \text{س} = ٢(١) = ٢$

∴ $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{غا}}\ \text{ق} = \underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{غا}}\ \text{ق} = ٢$

مثال ٩) ليكن ق : ح / { ـ١ } ← ح بحيث $\text{ق(س)} = \frac{\text{٢س}^{٢} - \text{س} - ٣}{\text{س} + ١}$ جد $\underset{-١}{\text{غـا}}$ ق

عند رسمنا للمخطط الديكارتي للتطبيق يظهر ان المخطط يمثل خط مستقيم

وتظهر فجوة عند النقطة (ـ ١ ، ـ ٥)



شكل (٥ـ١)

وبالتحليل للعوامل نستطيع كتابة

$\text{ق(س)} = \frac{(\text{٢س} - ٣)(\text{س} + ١)}{\text{س} + ١}$ (∀ س ≠ -١)

وبما ان س ≠ ـ١ ⟸ س + ١ ≠ ٠

∴ يجوز لنا قسمة البسط والمقام على س + ١

∴ ق(س) = ٢س ـ ٣ ∀ س ≠ ـ١

ليكن ع(س) = ٢س ـ ٣ ∀ س ∈ ح

ونحن نعلم من الفصل الرابع ان التطبيق ع مستمر كثير الحدود

∴ $\underset{-١}{\text{غـا}}$ ع = ع (ـ١) = ـ٥

وبما ان ع(س) = ق(س) ∀ س ∈ ح / { ـ١ }

∴ $\underset{-١}{\text{غـا}}$ ع (س) = $\underset{-١}{\text{غـا}}$ ق(س) = ـ٥ (راجع الملاحظة ٥)

مثال ١٠) ليكن ق ح⁺ / { ٤ } ← ح بحيث $\text{ق(س)} = \frac{\text{س} - ٤}{٣(\sqrt{\text{س}} - ٢)}$ نجد $\underset{٤}{\text{غـا}}$ ق

الحل/ عند التعويض عن س بالعدد (٤) مباشرة فان ق(٤) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

والتي لامعنى لها .

ولكن بضرب البسط والمقام بمرافق المقام $\sqrt{\text{س}}$ + ٢ بشرط س ∈ ح⁺ / { ٤ }

فان $\text{ق(س)} = \frac{\text{س} - ٤}{٣(\sqrt{\text{س}} - ٢)} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + ٢}{\sqrt{\text{س}} + ٢} = \frac{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س}} + ٢)}{٣(\text{س} - ٤)}$

وبما ان س ≠ ٤ فباستطاعتنا حذف العامل المشترك لنحصل على

$\text{ق(س)} = \frac{\sqrt{\text{س}} + ٢}{٣}$ ، ∀ س ∈ ح⁺ / { ٤ }

ليكن $\text{ع (س)} = \frac{\sqrt{\text{س}} + ٢}{٣}$ ∀ س ∈ ح⁺

ان ع تطبيق مستمر عند ٤ (برهن)

∴ $\underset{٤}{\text{غـا}}$ ع (س) = ع (٤) = $\frac{\sqrt{٤} + ٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$

وبما ان ق(س) = ع (س) ∀ س ∈ ح⁺ / {٤}

∴ $\underset{٤}{\text{غـا}}$ ق = $\underset{٤}{\text{غـا}}$ ع = $\frac{٤}{٣}$ (راجع ملاحظة ٥)

مثال ١١) ليكن ك = $\{\text{س} : \text{س} \geqslant -٢ ، \text{س} \neq -١\}$

وليكن ق : ك $\longleftarrow$ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\sqrt{٢+\text{س}}-١}{\text{س}+١}$

جد $\underset{-١}{\text{غـا}}$ ق

الحل/ بما ان س $\neq -١$

∴ يمكن ضرب البسط والمقام بمرافق البسط فيصبح :-

$$\text{ق(س)} = \frac{(\sqrt{٢+\text{س}}-١)(\sqrt{٢+\text{س}}+١)}{(\text{س}+١)(\sqrt{٢+\text{س}}+١)} = \frac{١+\text{س}}{(\text{س}+١)(\sqrt{٢+\text{س}}+١)}$$

وبما ان س $\neq -١$

∴ يمكن قسمة البسط والمقام على (س + ١) فيصبح

$$\text{ق(س)} = \frac{١}{\sqrt{٢+\text{س}}+١}$$

ليكن ع (س) = $\dfrac{١}{\sqrt{٢+\text{س}}+١}$ $\forall$ س $\geqslant -٢$

وبما ان ع مستمر عند (-١) (برهن)

$$\therefore \underset{-١}{\text{غـا}}\,\text{ع(س)} = \text{ع}(-١) = \frac{١}{\sqrt{٢-١}+١} = \frac{١}{٢}$$

ولكن ع (س) = ق(س) $\forall$ س $\in$ ك

$$\therefore \underset{-١}{\text{غـا}}\,\text{ق} = \underset{-١}{\text{غـا}}\,\text{ع} = \frac{١}{٢}$$

مثال ١٢) اذا كان كل من م ، ن $\in$ ط$^{+}$ ، أ $\in$ ح

ق : ح / $\{\text{أ}\}$ $\longleftarrow$ ح بحيث ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{\text{ن}}-\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}}-\text{أ}^{\text{م}}}$ فجد $\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}$ ق

الحل/ بما ان س $\neq$ أ $\Longleftarrow$ س - أ $\neq$ صفر

∴ يمكن قسمة البسط والمقام على س - أ فيصبح

$$\text{ق(س)} = \frac{\dfrac{\text{س}^{\text{ن}}-\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}-\text{أ}}}{\dfrac{\text{س}^{\text{م}}-\text{أ}^{\text{م}}}{\text{س}-\text{أ}}} = \frac{\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}\dfrac{\text{س}^{\text{ن}}-\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}-\text{أ}}}{\underset{\text{أ}}{\text{غـا}}\dfrac{\text{س}^{\text{م}}-\text{أ}^{\text{م}}}{\text{س}-\text{أ}}}$$

$$= \frac{\text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}}{\text{م}\,\text{أ}^{\text{م}-١}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$$ (راجع ملاحظة ٦)

مثال ١٣) ليكن ق(س) = $س^٢ + ٣$

جد $\underset{س \to صفر}{غـا} \frac{ق(٥ + س) - ق(٥)}{س}$ حيث س $\neq$ صفر

الحل/ التعويض عن س بالعدد صفر يقودنا الى $\frac{ق(٥) - ق(٥)}{صفر} = \frac{صفر}{صفر}$ لامعنى لها

ولذلك يجب ان نتبع مايلي :-

$ق(٥) = ٢٨$ ، $ق(٥ + س) = (٥ + س)^٢ + ٣ = س^٢ + ١٠س + ٢٨$

$\therefore \frac{ق(٥ + س) - ق(٥)}{س} = \frac{س^٢ + ١٠س + ٢٨ - ٢٨}{س}$

$= \frac{س^٢ + ١٠س}{س} = س + ١٠$ لان س $\neq ٠$

$\therefore \underset{س \to ٠}{غـا} \frac{ق(٥ + س) - ق(٥)}{س} = ١٠$

مثال ١٤) ليكن ق : ح / {−١} $\longrightarrow$ ح بحيث $ق(س) = \frac{١}{(س + ١)^٢}$

جد $\underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{ق(٤ + ع) - ق(٤)}{ع}$ ، ع $\neq$ صفر

الحل/ التعويض المباشر عن ع = صفر يعطينا $\frac{ق(٤) - ق(٤)}{صفر} = \frac{صفر}{صفر}$ لامعنى لها

بينما $ق(٤) = \frac{١}{٢٥}$ ، $ق(٤ + ع) = \frac{١}{(٤ + ع + ١)^٢} = \frac{١}{(٥ + ع)^٢}$

$\therefore \underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{ق(٤ + ع) - ق(٤)}{ع} = \underset{ع \to ٠}{غـا} \frac{\frac{١}{(٥ + ع)^٢} - \frac{١}{٢٥}}{ع}$

وعند التعويض عن ع = صفر سنحصل على النتيجة $\frac{صفر}{صفر}$ ايضا وبتبسيط المقدار اكثر وذلك بايجاد المضاعف المشترك لمخارج كسور البسط نحصل على :-

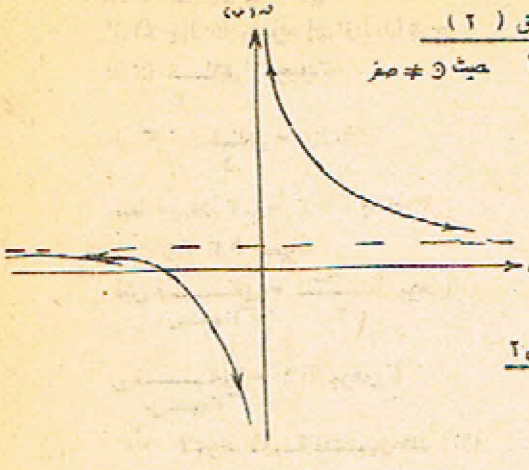
$\frac{ق(٤ + ع) - ق(٤)}{ع} = \frac{٢٥ - (٥ + ع)^٢}{٢٥ع(٥ + ع)^٢} = \frac{-(١٠ع + ع^٢)}{٢٥ع(٥ + ع)^٢}$

$= \frac{-ع(١٠ + ع)}{٢٥ع(٥ + ع)^٢}$ وبما ان ع $\neq$ صفر نيكن اختصار العامل المشترك

$\therefore \underset{ع \to صفر}{غـا} \frac{-(١٠ + ع)}{٢٥(٥ + ع)^٢} = \frac{-٢}{١٢٥}$

مثال ١٥) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$

جد $\lim\limits_{\text{ن} \to \text{صفر}} \dfrac{\text{ق}(\text{ن} + ٢) - \text{ق}(٢)}{\text{ن}^{٢}}$ حيث ن $\neq$ صفر



(شكل ٥ــ٢)

الحل/ $\text{ق}(٢) = ٤$

$\text{ق}(٢ + \text{ن}) = (\text{ن} + ٢)^{٢}$

$= ٤ + ٤\text{ن} + \text{ن}^{٢}$

وبما ان ن $\neq$ صفر

$\therefore \dfrac{\text{ق}(٢ + \text{ن}) - \text{ق}(٢)}{\text{ن}^{٢}}$

$= \dfrac{٤ + ٤\text{ن} + \text{ن}^{٢} - ٤}{\text{ن}^{٢}} = \dfrac{٤\text{ن} + \text{ن}^{٢}}{\text{ن}^{٢}}$

$= \dfrac{\text{ن}(٤ + \text{ن})}{\text{ن}^{٢}} = \dfrac{٤ + \text{ن}}{\text{ن}}$

من المخطط الديكارتي المجاور (شكل (٥ــ٢))

نلاحظ ان $\text{ص} = \dfrac{٤ + \text{ن}}{\text{ن}}$ يزداد بدون حدود

عندما ن $\longrightarrow$ صفر خلال القيم الموجبة

ويتناقص بدون حدود عندما ن $\longrightarrow$ صفر خلال القيم السالبة .

$\therefore$ لاتوجد النهاية

مثال ١٦) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$

جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to \text{صفر}} \dfrac{\text{ق}(-١ + \text{هـ}) - \text{ق}(-١)}{\sqrt{\text{هـ}}}$ ، هـ > صفر

الحل/ $\text{ق}(-١) = -١$ $\text{ق}(-١ + \text{هـ}) = (-١ + \text{هـ})^{٣} = \text{هـ}^{٣} - ٣\text{هـ}^{٢} + ٣\text{هـ} - ١$

$\therefore \dfrac{\text{ق}(-١ + \text{هـ}) - \text{ق}(-١)}{\sqrt{\text{هـ}}} = \dfrac{\text{هـ}^{٣} - ٣\text{هـ}^{٢} + ٣\text{هـ} - ١ - (-١)}{\sqrt{\text{هـ}}} = \dfrac{\text{هـ}(\text{هـ}^{٢} - ٣\text{هـ} + ٣)}{\sqrt{\text{هـ}}}$

$= \sqrt{\text{هـ}}\ (\text{هـ}^{٢} - ٣\text{هـ} + ٣)$

$\therefore \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{ق}(-١ + \text{هـ}) - \text{ق}(-١)}{\sqrt{\text{هـ}}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \sqrt{\text{هـ}}\ (\text{هـ}^{٢} - ٣\text{هـ} + ٣) = \text{صفر}$

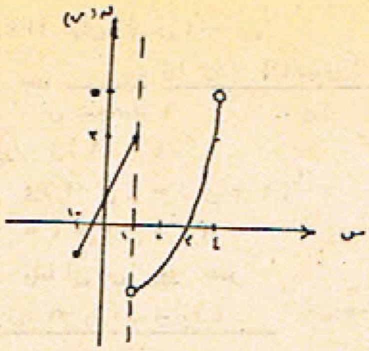
مثال ١٧) ليكن ق: $[-١ ، ٤] \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ & -١ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٣ & ١ < \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$

(١) مثل ق ديكارتيا

(٢) هل ق مستمر عند ١ ؟ برهن اجابتك باستخدام الملاحظات (٥ــ ٢)

الملاحظة الاولى

البرهان/ لكي نبرهن ان ق مستمرعند (١)



شكل (٥ـ٣)

يجب ان نبرهن مايلي :ـ

(١) ق(١) معرف اى ق(١) ∈ ح

(٢) غـــا ق موجودة
١

(٣) غـا ق = ق(١)
١

وبما ان ق(١) = ٢ × ١ + ١ = ٣

∴ ق(١) معرف

لكن غــــا ق = $\frac{٥}{٢}$ (برهن)
س ← ١⁺

وغــــا ق = ٣ (برهن)
س ← ١⁻

∴ لاتوجد غايــة للتطبيق عند (١)

اى ان الشرط الثاني غير متوفر

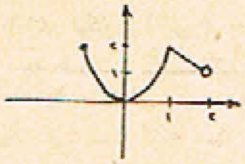
∴ ق غير مستمرعند (١)

مثال ١٨) ليكن ق : [ـ١ ، ٢] ⟵ ح بحيث ق(س) = { ٢س^٢ س ∈ [ـ١ ، ١] ؛ ٣ـ س س ∈] ١ ، ٢] }

(١) مثل ق ديكارتيا

(٢) بنفس الطريقة الواردة في المثال ١٧ برهن ق مستمرعند ١

(٣) هل توجد غــــا $\frac{ق(١+ هـ) ـ ق(١)}{هـ}$ ؟ برهن اجابتك
هـ ← ٠



شكل (٥ـ٤)

الحل/ (١) ق (١) = ٢ معرف

(٢) غـــا ق = ٢ (برهن)
س ← ١⁺

غـــا ق = ٢ (برهن)
س ← ١⁻

∴ غـــا ق = غـــا ق = ٢ اى أن الغاية موجودة وتساوى ٢
س ← ١⁺ س ← ١⁻

(٣) غـــا ق = ق (١)
١

∴ ق مستمرعند ١

(٣) غـــا $\frac{ق(١ + هـ) ـ ق(١)}{هـ}$
هـ ← ٠

(أ) نجد ق (١ + هـ) وهنا اما هـ > صفر فيكون هـ + ١ > ١ أو هـ < صفر فيكون ١ + هـ < ١ فاذا كان هـ > صفر فان ق(١ + هـ) =
٣ ـ (١ + هـ) = ٣ ـ ١ ـ هـ = ٢ ـ هـ

وان ق (١) = ٢

$\therefore \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \dfrac{2 - \text{هـ} - 2}{\text{هـ}} = -1$

$\therefore \underset{\text{هـ}\to \text{صفر}^{+}}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = -1$

واذا كان هـ < صفر فهنا ق (١ + هـ) = $2(1+\text{هـ})^2 = 2(1+2\text{هـ}+\text{هـ}^2)$

$= 2 + 4\text{هـ} + 2\text{هـ}^2$

$\therefore \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \dfrac{2 + 4\text{هـ} + 2\text{هـ}^2 - 2}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} \dfrac{\text{هـ}(4 + 2\text{هـ})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{غا}} (4 + 2\text{هـ}) = 4$

$\therefore \underset{\text{هـ}\to \text{صفر}^{-}}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} = 4$

$\therefore \underset{\text{هـ}\to \text{صفر}^{+}}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} \neq \underset{\text{هـ}\to \text{صفر}^{-}}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}}$

$\therefore$ لاتوجد $\underset{\text{هـ}\to \text{صفر}}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}}$

مثال ١٩) ليكن ق : [−٥ ، ٥] ⟵ ح

بحيث ق(س) = $\begin{cases} |\text{س} - 4| & \forall\ \text{س} \in]2 , 5] \\ 2\text{س} - 2 & \forall\ \text{س} \in [-2 , 2] \\ [\text{س} - 2] & \forall\ \text{س} \in [-5 , -2[\end{cases}$

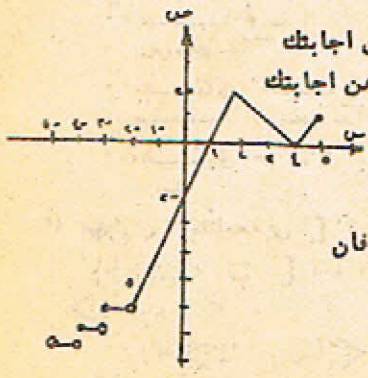
مثّله ديكارتيا ثم

١) برهن ان $\underset{2}{\text{غا}}\ \text{ق} = 2$

٢) برهن ان $\underset{-2}{\text{غا}}\ \text{ق} = 6$

٣) هل توجد للتطبيق ق غاية عند ٤ ؟ برهن اجابتك

٤) هل توجد للتطبيق ق غاية عند − ٤ ؟ برهن اجابتك



الحل/ (١) ∀ ⟨سن⟩ متتابعة في [−٢ ، ٢] / {٢} متقاربة غايتها = ٢

(١) عندما ⟨سن⟩ في]−٢ ، ٢[فان

⟨ق(سن)⟩ = ⟨٢سن − ٢⟩

غا ⟨ق(م ن)⟩ = غا ⟨٢م ن − ٢⟩
= ٢غا ⟨م ن⟩ − غا ⟨٢⟩ = ٢ × ٢ − ٢ = ٢
اي غـــا ق = ٢
س ← ٢⁻

٢) عندما ⟨م ن⟩ ⊂]٢ ، ٤[فان ⟨ق(م ن)⟩ = ⟨|م ن − ٤|⟩
= ⟨− (م ن − ٤)⟩
∴ غـا ⟨ق(م ن)⟩ = غا ⟨− (م ن − ٤)⟩
= − غا ⟨م ن⟩ − غا ⟨−٤⟩ = −٢ + ٤ = ٢
∴ غـا ق = ٢
س ← ٢⁺
∴ غـــا ق = غـــا ق = ٢
س ← ٢⁻ س ← ٢⁺
∴ غـــا ق = ٢
٢

٢) ∀⟨س ن⟩ متتابعة في [−٣ ، ٢] / {٢} متقاربة وغايتها = −٢
فان (١) عندما ⟨س ن⟩ ⊂]−٢ ، ٢] فان
⟨ق(س ن)⟩ = ⟨٢س ن − ٢⟩
∴ غـا ⟨ق(س ن)⟩ = غا ⟨س ن⟩ − غا ⟨٢⟩ = ٢(−٢) − ٢ = −٦
∴ غـــــا = −٦
س ← −٢⁺
٢) عندما ⟨س ن⟩ ⊂ [−٣ ، −٢[فان ⟨ق(س ن)⟩ = ⟨[س ن − ٣]⟩
= ⟨−٦⟩
∴ غا ⟨ق(س ن)⟩ = غا ⟨−٦⟩ = −٦
∴ غـــــا = −٦
س ← −٢⁻
∴ غـــا ق = غـــا ق = −٦
س ← −٢⁺ س ← −٢⁻
∴ غـــا ق = −٦
−٢

٣) ∀⟨م ن⟩ متتابعة في]٢ ، ٥[/ {٤} متقاربة وغايتها = ٤
اما ⟨م ن⟩ ⊂]٢ ، ٤[فان ⟨ق(م ن)⟩ = ⟨|م ن − ٤|⟩ =
⟨٤ − م ن⟩
∴ غا ⟨ق(م ن)⟩ = غا ⟨٤⟩ − غا ⟨م ن⟩ = ٤ − ٤ = صفر
∴ غـــا ق = صفر
س ← ٤⁻

او $\langle م_ن \rangle \subset]٤ ، ٥[$ فان $\langle ق(م_ن) \rangle = \langle |م_ن - ٤| \rangle = \langle م_ن - ٤ \rangle$

$\therefore$ غا $\langle ق(م_ن) \rangle =$ غا $\langle م_ن - ٤ \rangle =$ غا $\langle م_ن \rangle -$ غا $\langle ٤ \rangle =$

$٤ - ٤ =$ صفر

$\therefore \underset{س \to ٤^{+}}{\text{غـــا}}\, ق =$ صفر

$\therefore \underset{س \to ٤^{+}}{\text{غـــا}}\, ق = \underset{س \to ٤^{-}}{\text{غـــا}}\, ق =$ صفر

$\therefore \underset{٤}{\text{غـــا}}\, ق =$ صفر

<u>ملاحظة</u> / يمكن برهن $\underset{٤}{\text{غـــا}}\, ق =$ صفر باستخدام الملاحظة الاولى من ملاحظات (٥ ـ ٢)

بما ان ق مستمر عند ٤ ، $\underset{٤}{\text{غـــا}}\, ق = ق(٤) = |٤ - ٤| =$ صفر

٤) $\forall \langle م_ن \rangle$ متتابعة في $]-٥ ، -٣[\,/\, \{-٣\}$ متقاربة غايتها $= -٤$

٥) اذا كان $\langle م_ن \rangle \subset]-٤ ، -٣[$ فان $\langle ق(م_ن) \rangle =$
$\langle [م_ن - ٣] \rangle = \langle -٧ \rangle$

$\therefore$ غا $\langle ق(م_ن) \rangle =$ غا $\langle -٧ \rangle = -٧$

$\therefore \underset{س \to -٤^{+}}{\text{غـــا}}\, ق = -٧$

٦) اذا كان $\langle م_ن \rangle \subset]-٥ ، -٤[$ فان $\langle ق(م_ن) \rangle = \langle [م_ن - ٣] \rangle$

$\therefore$ غا $\langle ق(م_ن) \rangle =$ غا $\langle -٨ \rangle = -٨$

$\therefore \underset{س \to -٤^{-}}{\text{غـــا}}\, ق = -٨$

$\therefore \underset{س \to -٤^{+}}{\text{غـــا}}\, ق \neq \underset{س \to -٤^{-}}{\text{غـــا}}\, ق$

$\therefore$ لاتوجد غاية للتطبيق عند (ـ٤)

<u>ملاحظة</u> / يمكن برهنة انه ليس للتطبيق غاية عند (ـ٤) وذلك كما يلي :ـ

$\exists \langle م_ن \rangle = \langle -٤ + \frac{١}{ن^{٢}} \rangle$ متتابعة في $]-٤ ، -٣[$ متقاربة

غايتها $= -٤$ وان غا $\langle ق(م_ن) \rangle = -٧$

وكذلك $\exists \langle م_ن \rangle = \langle -٤ - \frac{١}{ن^{٢}} \rangle$ متتابعة في $]-٥ ، -٤[$

متقاربة غايتها $= -٤$

$\therefore$ غا $\langle ق(م_ن) \rangle = -٨$

$\therefore$ لاتوجد غاية للتطبيق عند ـ٤ وهذا استنادا الى التعريف (٥ ـ ٢)

تماريـــــن

١) ليكن ق : ح / {٢} ⟵ ح بحيث $ق(س) = \dfrac{س - ٢}{|س - ٢|}$ برهن انـــه لاتوجد غاية للتطبيق عند ٢

٢) ليكن ق : ح / {٣} ⟵ ح بحيث $ق(س) = \dfrac{١}{(س - ٣)^{٢}}$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) هل توجد غاية للتطبيق عند ٣ ؟ برهن اجابتك

في كل من التمارين (من ٣ الى ١٤) .

١) جد اكبر منطلق للتطبيق مثل ك (٢) جد $\underset{أ}{غا}$ ق ان وجد حيث أ يلاصق الى ك والمبين ازاء كل تطبيق أدناه .

٣) $ق(س) = \dfrac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ ، أ = ٢

٤) $ق(س) = \dfrac{س^{٣} + ٢س - ١}{س + ٢}$ ، أ = ٣

٥) $ق(س) = \dfrac{س^{٣} + ١}{س + ١}$ ، أ = ـ ١

٦) $ق(س) = \dfrac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٧س + ٢}$ ، أ = ٣

٧) $ق(س) = \dfrac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} - ٤س + ٤}$ ، أ = ٢

٨) $ق(س) = \dfrac{س^{٤} - ١}{س^{٢} - ١}$ ، أ = ١

٩) $ق(س) = \dfrac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$ ، أ = ٢

١٠) $ق(س) = \dfrac{س^{٤} - ٢س - ٣}{س + ١}$ ، أ = ـ ١

١١) $ق(س) = \dfrac{\sqrt{٢س + ٣} - س}{س - ٣}$ ، أ = ٣

١٢) $ق(س) = \dfrac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣}$ ، أ = ٩

١٣) $ق(س) = \dfrac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٩} - ٤}$ ، أ = ـ ٣

١٤) $ق(س) = \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ٣} - ٢}{س + ١}$ ، أ = ـ ١

جد الغاية لكل من التمارين (من ١٥ الى ٢٢)

١٥) $\underset{س \to ٣}{غا} (س^{٢} + ٤س - ٦)$

١٦) $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س} - ٤}$ ، س $\neq$ ٤

١٧) $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} \frac{\sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}}{\text{س} + ٢}$ ، س $\in$ [−٢ ، ٢]

١٨) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{س} + ٥} - \sqrt{٥}}{٢\text{س}}$ ، س $\geq$ −٥ ، س $\neq$ صفر

١٩) $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\sqrt{٢\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{٢\text{س}}}{\text{هـ}}$ ، س $\in$ ح$^{+}$ ، هـ $\in$ ح$^{++}$

٢٠) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - \sqrt[٣]{٢}}{\text{س} - ٢}$ ، س $\neq$ ٢

٢١) $\lim\limits_{\text{س}\to -٤} \frac{\text{س}^{٦} - ٤٠٩٦}{\text{س} + ٤}$ ، س $\neq$ −٤

٢٢) $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨}$ ، س $\in$ ح / {−٢ ، −٤}

٢٣) اذا كان ق: ح / {٢} ← ح بحيث ق(س) = $\frac{\text{س}^{٩} - ٣٢}{\text{س}^{٤} - ١٦}$ نجد $\lim\limits_{٢}$ ق

٢٤) اذا كان ق: ح / {$\sqrt{٣}$} ← ح بحيث ق (س) = $\frac{\text{س}^{٦} - ٢٧}{\text{س} - \sqrt{٣}}$ نجد $\lim\limits_{\sqrt{٣}}$ ق

٢٥) ليكن ق: ح /]١ ، ٢[← ح بحيث ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$ نجد $\lim\limits_{٢}$ ق
وبرهن انه لاتوجد غاية للتطبيق عند ١ .

٢٦) اذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س}^{٢} + ١}$ نجد $\lim\limits_{-١}$ ق

٢٧) ليكن ق : ح$^{+}$/{أ} ← ح بحيث ق (س) = $\frac{\sqrt{\text{س}} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}}$ حيث أ $\in$ ح$^{+}$
نجد $\lim\limits_{\text{أ}}$ ق

٢٨) ليكن ق: ح$^{+}$ /{أ} ← ح بحيث ق(س) = $\frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - \sqrt[٣]{\text{أ}}}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{أ}}}$ نجد $\lim\limits_{\text{أ}}$ ق ،
أ $\in$ ح$^{+}$

من تمرين (٢٩ الى ٣٣) احسب الغاية ان وجدت

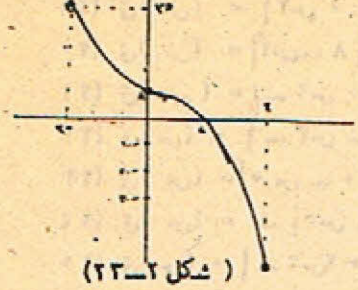
٢٩) $\lim\limits_{\text{س}\to \text{صفر}} \frac{\text{ق}(٤ + \text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س}}$ ، ق (س) = ٣س^{٢} − ١

٣٠) $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$ ، ق (س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ ، س $\neq$ صفر

٣١) $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$ ، ق (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، أ $\neq$ صفر ، س $\neq$ صفر

(٢) ق :] −٣ ، ٤] ⟵ ح بحيث ق(س) = ٨ − س^{٣}

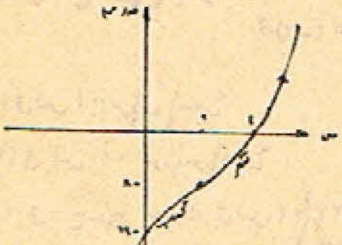
س	ص
−٣	٣٥
٤	−٥٦
٠	٨
٢	٠



(شكل ٢ـ٢٣)

(٣) ق(س) = (س − ٢)^{٣} − ٨

س	ص
٠	−١٦
٤	٠
٢	−٨



(شكل ٢ـ٢٤)

تمارين ٢ـ٣

ارسم مخططا ديكارتيا لكل من التطبيقات التاليـة :ـ

(١) ق(س) = −س^{٣} (٢) ق(س) = س^{٣} − ٢ (٣) ق(س) = س^{٣} + ٢

(٤) ق(س) = ٢س^{٣} − ٣ (٥) ق(س) = −٢س^{٣} + ١

(٦) ق(س) = (س − ٢)^{٣} (٧) ق(س) = −(س − ٢)^{٣}

(٨) ق(س) = (س − ٢)^{٣} + ٢ (٩) ق(س) = (س − ٢)^{٣} − ٢

(١٠) ق(س) = ٢ − (س − ٣)^{٣} (١١) ق(س) = −٢ − (س − ٢)^{٣}

(١٢) ق(س) = (٢س + ٣)^{٣} (١٣) ق(س) = (٢س + ٣)^{٣} + ٢

(١٤) ق(س) = (٢س + ٣)^{٣} − ٢ (١٥) ق(س) = ٢ − (٢س + ٣)^{٣}

(١٦) ق(س) = |٢س^{٣} + ٤| (١٧) ق(س) = |−٢س^{٣} + ٤| − ٣

(١٨) ق(س) = − |٢س^{٣} − ٣| + ٥ (١٩) ق(س) = |س^{٣} + ١|

(٢٠) ق(س) = س |س^{٢}| + س^{٣}

$$= \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\frac{\text{س} - (\text{س} + \text{ع})}{\text{س}(\text{س} + \text{ع})}}{\text{ع}} = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{-1}{\text{س}(\text{س} + \text{ع})} = \frac{-1}{\text{س}^2}$$

مثال ٣) ليكن ق : $\text{ح}^{++} \to \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$. جد $\text{ق}'(\text{س})$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}} = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع}} \times \frac{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}} = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\text{س} + \text{ع} - \text{س}}{\text{ع}(\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})}$$

$$= \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{1}{\sqrt{\text{س}+\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$$

مثال ٤) ليكن ق : ح ← ح بحيث

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س}^2 + 1 & \text{س} \geq 2 \\ 5\text{س} - 1 & \text{س} < 2 \end{cases}$$

هل ق قابل للاشتقاق عند (٢) ؟ برهن اجابتك

الحل/ من التعريف : اذا وجدت $\underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2 + \text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}}$ فان ق قابل للاشتقاق عند ٢

١) اذا كان ع > صفر فان

$$\underset{\text{ع} \to 0^+}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2+\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{2(2+\text{ع})^2 + 1 - 9}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{9 + 8\text{ع} + 2\text{ع}^2 - 9}{\text{ع}} = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} (8 + 2\text{ع}) = 8$$

$$\text{اى } \underset{\text{ع} \to \text{صفر}^+}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2 + \text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}} = 8$$

٢) اذا كان ع < ٠

$$\text{فان } \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2+\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{5(2+\text{ع}) - 1 - 9}{\text{ع}} = \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{9 + 5\text{ع} - 9}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{5\text{ع}}{\text{ع}} = 5 \quad \therefore \underset{\text{ع} \to \text{صفر}^-}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2+\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}} = 5$$

$$\therefore \underset{\text{ع} \to \text{صفر}^+}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2+\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}} \neq \underset{\text{ع} \to \text{صفر}^-}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2 + \text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{لاتوجد } \underset{\text{ع} \to 0}{\text{غـا}} \frac{\text{ق}(2 + \text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع}}$$

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند ٢

مثال ٥) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = $|\text{٣س} - ٥|$

هل ق قابل للاشتقاق عند $\frac{٥}{٣}$ ؟ برهن اجابتك ثم جد قَ(٧)

الحل/ اذا وجدت $\underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(\frac{٥}{٣}+\text{ع}) - \text{ق}(\frac{٥}{٣})}{\text{ع}}$ فان ق قابل للاشتقاق عند $\frac{٥}{٣}$

ولذا الان هل توجد هذه الغاية ؟

$$\underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(\frac{٥}{٣}+\text{ع}) - \text{ق}(\frac{٥}{٣})}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{|٣(\frac{٥}{٣}+\text{ع})-٥| - |٣(\frac{٥}{٣})-٥|}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{|٥+\text{٣ع}-٥| - \text{صفر}}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{|\text{٣ع}|}{\text{ع}}$$

١) إما ع > ٠ اي ع ← صفر$^{+}$ فتكون $\underset{\text{ع}\to ٠^{+}}{\text{غا}} \frac{|\text{٣ع}|}{\text{ع}} = ٣$

٢) او ع < ٠ اي ع ← صفر$^{-}$ فتكون $\underset{\text{ع}\to ٠^{-}}{\text{غا}} \frac{-\text{٣ع}}{\text{ع}} = -٣$

∴ لاتوجد $\underset{\text{ع}\to \text{صفر}}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(\frac{٥}{٣}+\text{ع}) - \text{ق}(\frac{٥}{٣})}{\text{ع}}$

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند $\frac{٥}{٣}$

$$\text{قَ}(٧) = \underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{\text{ق}(٧+\text{ع}) - \text{ق}(٧)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{|٣(٧+\text{ع})-٥| - ١٦}{\text{ع}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{|١٦+\text{٣ع}| - ١٦}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to ٠}{\text{غا}} \frac{١٦+\text{٣ع}-١٦}{\text{ع}} = ٣$$

مثال ٦) ليكن ق : {س : س ≤ ٤} ← ح

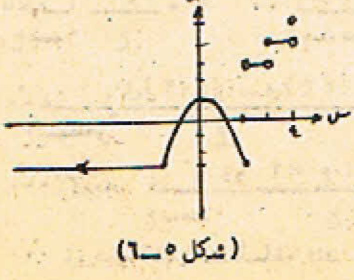
بحيث ق(س) =
$$\begin{cases} ١ - \text{س}^٢ & \text{س} \in [-٢ ، ٢] \\ [\text{س}] + ١ & \text{س} \in]٢ ، ٤] \\ -٣ & \text{س} < -٢ \end{cases}$$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) هل ق مستمر عند −٢ ، ٢ ، ٣ ؟ برهن اجابتك

هل توجد غاية للتطبيق عند −٢ ، ٢ ، ٣ ؟ برهن اجابتك

٤) هل ق قابل للاشتقاق عند (−٢) ؟ برهن اجابتك

٥) برهن ان ق محدود وجد اعظم واوطأ قيمة للتطبيق .



(شكل ٥ ـ ٦)

٦) جد اكبر مجموعة جزئية من ح يكون فيها ق متزايدا وبرهن اجابتك

٧) جد اكبر مجموعة جزئية من ح يكون فيها ق متناقصا وبرهن اجابتك

٨) جد اكبر مجموعة جزئية من ح يكون فيها ق غير متزايد وغير متناقص

الحل/ سوف اجيب على الفرع الرابع من السؤال واترك باقي الفروع كتمرين للطالب .

$$\underset{ع\to ٠^{+}}{\text{غـا}} \frac{ق(-٢+ع) - ق(-٢)}{ع} = \underset{ع\to ٠^{+}}{\text{غـا}} \frac{١ - (-٢+ع)^{٢} - (-٣)}{ع} \quad \text{اذا}$$

$$= \underset{ع\to ٠^{+}}{\text{غـا}} \frac{١ - (٤ - ٤ع + ع^{٢}) + ٣}{ع} = \underset{ع\to ٠^{+}}{\text{غـا}} \frac{-٣ + ٤ع - ع^{٢} + ٣}{ع} = ٤$$

كذلك $$\underset{ع\to ٠^{-}}{\text{غـا}} \frac{ق(-٢+ع) - ق(-٢)}{ع} = \underset{ع\to ٠^{-}}{\text{غـا}} \frac{-٣ - (-٣)}{ع} = \text{صفر}$$

$$\therefore \underset{ع\to \text{صفر}^{+}}{\text{غـا}} \frac{ق(-٢+ع) - ق(س)}{ع} \neq \underset{ع\to \text{صفر}^{-}}{\text{غـا}} \frac{ق(-٢+ع) - ق(-٢)}{ع}$$

$\therefore$ لاتوجد $$\underset{ع\to ٠}{\text{غـا}} \frac{ق(-٢+ع) - ق(-٢)}{ع}$$

$\therefore$ ق غير قابل للاشتقاق عند (-٢) .

مثال ٧) ليكن $ق : ح \longrightarrow ح$ بحيث $$ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٥س & س \geq ٢ \\ س^{٢} + ٣س - ٨ & س < ٢ \end{cases}$$

هل ق قابل للاشتقاق عند ٢ ؟ برهن أجابتك

الحل/ $$\underset{ع\to \text{صفر}^{+}}{\text{غـا}} \frac{ق(٢+ع) - ق(٢)}{ع} = \underset{ع\to \text{صفر}^{+}}{\text{غـا}} \frac{٣(٢+ع)^{٢} - ٥(٢+ع) - ٢}{ع}$$

$$= \underset{ع\to \text{صفر}^{+}}{\text{غـا}} \frac{٧ع + ٣ع^{٢}}{ع} = ٧$$

$$\underset{ع\to \text{صفر}^{-}}{\text{غـا}} \frac{ق(٢+ع) - ق(٢)}{ع} = \underset{ع\to \text{صفر}^{-}}{\text{غـا}} \frac{(٢+ع)^{٢} + ٣(٢+ع) - ٨ - ٢}{ع}$$

$$\underset{ع\to \text{صفر}^{-}}{\text{غـا}} \frac{٧ع + ع^{٢}}{ع} = ٧$$

$$\therefore \underset{ع\to \text{صفر}}{\text{غـا}} \frac{ق(٢+ع) - ق(٢)}{ع} = ٧ = ق'(٢)$$

$\therefore$ ق قابل للاشتقاق عند ٢

تماريــــــن

جد باستخدام التعريف مشتقة كل من التطبيقات التالية (من ١ الى ٨)

١) $ق(س) = س^٢ - ٢س$ (٢) $ق(س) = \frac{١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

٣) $ق(س) = \frac{٢س + ٣}{٣س - ٢}$ ، $س \neq \frac{٢}{٣}$

٤) $ق(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{٢}$ (٥) $ق(س) = \frac{١}{\sqrt{س + ٣}}$ ، $س > -٣$

٦) $ق(س) = س\sqrt{س}$ ، $س > صفر$

٧) $ق(س) = \frac{س}{\sqrt{س - ١}}$ $س > ١$

٨) $ق(س) = \frac{١}{\sqrt{٤ - س^٢}}$ ، $|س| < ٢$

اى من التطبيقات التالية قابلة للاشتقاق عند أ المبين ازاء كل منها ؟ برهــــن اجابتك .

٩) $ق(س) = \sqrt{س}$ ، أ = ٤ , ٠ ، حيث المنطلق ح++

١٠) $ق(س) = س^٤$ ، أ = ١

١١) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & \forall\ س \in ص \\ س & س \in ح / ص \end{cases}$ ، أ = صفر

١٢) $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س} & \forall\ س \geq صفر \\ -\sqrt{-س} & س < صفر \end{cases}$ ، أ = صفر

١٣) $ق(س) = \sqrt{س} + \sqrt{-س}$ ، أ = صفر (جد اكبر منطلق لهــذا التطبيق)

١٤) $ق(س) = س - ل(س)$ حيث

$ل(س) = \begin{cases} س \cdot ع(س) & \text{اذا كانت } س \neq صفر \\ صفــر & \text{اذا كانت } س = ٠ \end{cases}$

وان $ع(س) = ع^*(\frac{١}{س})$: $ع : ح / \{٠\} \to ح$

وان $ع^*(س) = (س - [س])$ أص $([س] + ١ - س)$ ، أ = صفر

حيث أ(أص) ب = اصغر العددين أ ، ب

١٥) $ق(س) = ٣|س| + ١$ ، أ = صفــر

١٦) $ق(س) = [س + ١]$ أ = $-٢ر٥$

١٧) اذا كان ق : ح ← ح بحيث $ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ & \forall\ س < ١ \\ أس^٢ + ب س - ٤ & \forall\ س \geq ١ \end{cases}$

وكان ق قابلا للاشتقاق عند ال (١) فجد قيمة كل من [أ ، ب] الجواب:
(−٢ ، ٨)

١٨) ليكن ق : { س : س ≠ ٢ } ← ح بحيث

ق(س) = { ١ − س^{٢} ∀ س ≤ ١ ؛ [س] − ١ ∀ س > ١ }

١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق مستمر عند ١ وغير قابل للاشتقاق عند ١

٣) هل توجد غاية للتطبيق عند ٢ ؟ برهن ذلك

١٩) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { س^{٢} ∀ س > ١ ؛ س^{٣} ∀ س ≤ ١ }

١) برهن ان ق مستمر عند ١ وغير قابل للاشتقاق عند ١

٢٠) اذا كان ق : ك ← ح بحيث ق(س) = |٢س| − $\frac{٢}{٣}$ |٧ − ٣س|

حيث ك = { س : س ∈ ح ، س > $\frac{٧}{٣}$ } فبرهن باستخدام التعريف ان

ق′(أ) = صفر

∀ أ ∈ ك

٢١) اذا كان ق : ح ← ح بحيث ق(س) = ٤س^{٢} − ٦س + ٩

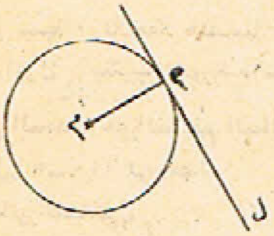
ل : ح ← ح بحيث ل(س) = ٦س + ١ فاثبت ان

ق′(س) + ل′(س) = ٨س .

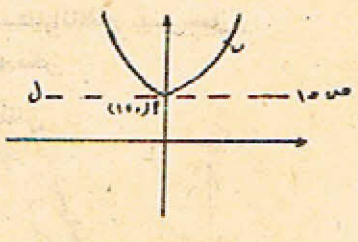
٢٢) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = { ٣ − س ∀ س ≤ ٢ ؛ ½ س^{٢} − ١ ∀ س > ٢ }

هل ق قابل للاشتقاق عند ٢ ؟ برهن اجابتك .

التفسير الهندسي للمشتقة



(شكل ٥ ـ ٧)



(شكل ٥ ـ ٨)

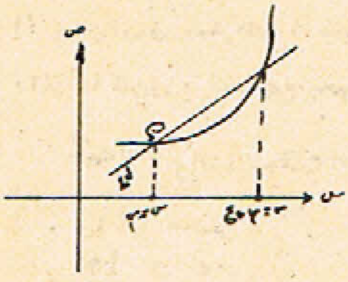
لقد سبق ان عرفنا المستقيم المماس للدائرة عند النقطة الواقعة على الدائرة وقلنا انه المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة وواحدة فقط وكما مرسوم في شكل (٥ ـ ٧) نلاحظ ان نصف قطر الدائرة م أ من مركز الدائرة م عمود على المستقيم ل المماس للدائرة عند نقطة أ . وعند رسمنا لمنحنى التطبيق ق (س) = س^{٢} + ١ كما في الشكل (٥ ـ ٨)

كيف نستطيع تعريف المستقيم المماس الى هذا المنحني عند النقطة أ ؟

اذا كان النقطة أ هي النقطة (٠ ، ١) ، اوطا نقطة على المنحني ، كما مبين في الشكل (٥ ـ ٨) وان المستقيم المماس هذا يمس المنحنى في نقطة واحـــدة وواحدة فقط .

ولكن هذا التعريف لايكفي ، طالما ان هناك عدة مستقيمات تشترك مع المنحنى في نقطة واحدة . فمثلا المحور الثاني يشترك مع المنحنى في نقطة واحدة ولكنه لايعتبـر مماسا للمنحنى .

ليكن المنحنى ص = ق (س) كما موضح في الشكل (٥ـ ٩)



(شكل ٥ـ ٩)

نرسم المستقيم $ل_ع$ خلال النقطتين م ، ن الواقعتين على منحنى التطبيق

وبما ان المستقيم الواصل بين نقطتين على المنحنى يسمى بالمستقيم القاطع للمنحنى

∴ $ل_ع$ هو المستقيم القاطع للمنحنى

ص = ق (س)

لتكن احداثي نقطة ن هي ($س_1$ ، $ص_1$)

وهذا يعني ان $ص_1$ = ق($س_1$)

ولتكن احداثيي نقطة م ($س_1$+ ع ، ق($س_1$ + ع) وعندما تكون ع > صفـــر

وان م تكون على يمين ن كما في الشكل (٥ ـ ٩) اما اذا كانت ع < صفر فان م تقع على يسار ن

$$\text{ميل المستقيم } ل_ع = \frac{ق(س_1+ع) - ق(س_1)}{س_1 + ع - س_1} = \frac{ق(س_1+ع) - ق(س_1)}{ع}$$

وعندما ع ⟵ ٠ نلاحظ هندسيا ان م ⟵ ن والمستقيم القاطع يدور حول ن والحقيقة ان $ل_ع$ يقترب نحو وضع محدد عندما ع ⟵ صفر

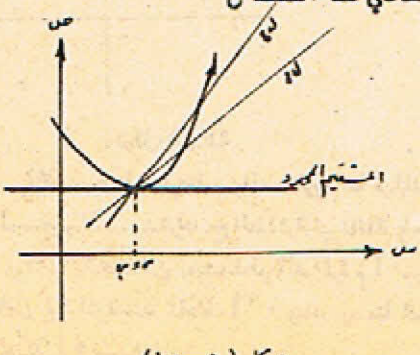
والمستقيم المحدد هو المستقيم المماس للمنحني عند النقطة ن

ففي الشكل (٥ـ ١٠) نرى عدة وضعيات الى المستقيم $ل_ع$

والوضع المحدد عندما ع ⟵ ٠

اي اذا كان التطبيق قابلا للاشتقاق عندما س = $س_1$

وبعبارة اخرى : ميل المماس للمنحني عند نقطة واقعة عليه يساوي المشتقـة عند تلك النقطـة .



شكل (٥ـ ١٠)

تعريف: المستقيم المماس للمنحنى ص = ق (س) عند ن (س١ ، ق (س١)) هو المستقيم المار بالنقطة ن (س١ ، ق (س١)) وميله قَ (س١)

اى ان معادلته :

ص ــ ق (س١) = قَ (س١) (س ــ س١)

تعريف : المستقيم العمود على المنحني الذى معادلته ص = ق (س) عند نقطة ن (س١ ، ق (س١)) هو المستقيم المار بنقطة ن والعمود على المستقيم المماس للمنحني عند نقطة ن .

مثال/ جد معادلة المستقيم المماس للمنحني ق(س) = س٢ + ١ عند نقطة على منحني بيان التطبيق والتي احداثيتها السيني = ٢ ثم جد معادلة المستقيم العمود على منحني بيان التطبيق عند النقطة التي احداثيها السيني = ٣

الحل/

١) ق(س) = س٢ + ١ ، س١ = ٢ ، ص١ = ق(٢) = ٥

قَ (س) = غـــا (ع ← ٠) [ق(س + ع) ــ ق(س)] / ع

= غـــا (ع ← ٠) [(س + ع)٢ + ١ ــ (س٢ + ١)] / ع

= غـــا (ع ← ٠) [س٢ + ٢ع س + ع٢ + ١ ــ س٢ ــ ١] / ع = غـــا (ع ← ٠) [٢ع س + ع٢] / ع

= غـــا (ع ← ٠) ٢س + ع = ٢س

∴ قَ (س) = ٢س ميل المماس لاية قيمة س في منطلق التطبيق

∴ قَ (٢) = ٢ × ٢ = ٤ ميل المماس

∴ المعادلة : ص ــ ق (٢) = قَ (٢) (س ــ ٢)

ص ــ ٥ = ٤ (س ــ ٢)

ص ــ ٤س + ٣ = ٠ معادلة المماس

٢) بما ان قَ (س) = ٢س ميل المماس لاية قيمة لـ س في منطلق التطبيق

∴ قَ(٣) = ٢ × ٣ = ٦ ميل المماس عند س = ٣

∴ المستقيم العمود ميله يساوى المقلوب السالب لميل المماس عند س = ٣

= ــ ١/٦

ق(٣) = ١٠ ∴ معادلة العمود

$$\text{ص} - ١٠ = -\frac{١}{٦}\,(\text{س} - ٢)$$

$$\text{س} + ٦\text{ص} - ٥٧ = ٠$$

نظريــة / اذا كان التطبيق قابلا للاشتقاق عند أ حيث أ ∈ منطلق فان ق مستمرا عند أ

البرهان/ ∵ ق قابلا للاشتقاق عند أ

$$\therefore \lim_{\text{ع} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع}} = \bar{\text{ق}}(\text{أ})$$

$$\text{ق}(\text{أ}+\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ}) = \left(\frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع}}\right)\text{ع}$$

عند ع ⟵ ٠ فان

$$\left(\frac{\text{ق}(\text{أ}+\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع}}\right) \cdot \text{ع} \longrightarrow \bar{\text{ق}}(\text{أ}) \cdot \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{أ}+\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ}) \longrightarrow \text{صفر}$$

∴ ق مستمرا عند أ

نظريــات في التفاضــل

١) اذا كان ق (س) = حـ ، ثابت ، ∀ س ∈ منطلقه فان $\bar{\text{ق}}$ (س) = صفــر (مشتقة التطبيق الثابت تساوى صفرا)

٢) اذا كان ن ∈ ط+ ، ق(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ فان $\bar{\text{ق}}$(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$

مثال $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س}^{١٧}) = ١٧\,\text{س}^{١٦}$

اذا كان ع (س) = حـ ق (س) . وكانت مشتقة ق (س) هي $\bar{\text{ق}}$(س) فــان

٣) $\bar{\text{ع}}$ (س) = حـ $\bar{\text{ق}}$ (س) حيث حـ عددا حقيقيا ثابتا .

(مشتقة حاصل ضرب ثابت في بيان تطبيق ما = الثابت × مشتقة بيان التطبيق)

مثال/ $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(٤\,\text{س}^{٧}) = ٤\,(٧\,\text{س}^{٦}) = ٢٨\,\text{س}^{٦}$

مثال اخر/ $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(-٢\,\text{س}^{٥}) = -٢ \times ٥\,\text{س}^{٤} = -١٠\,\text{س}^{٤}$

٤) اذا كان كل من ق ، ل قابلا للاشتقاق وكان ع (س) = ق (س) + ل (س) فان

$\bar{\text{ع}}$ (س) = $\bar{\text{ق}}$ (س) + $\bar{\text{ل}}$ (س)

(مشتقة المجموع الجبرى لعدة تطبيقات = المجموع الجبرى لمشتقات هــــذه التطبيقات)

مثال) اذا كان $ق(س) = ٣س^{٥} + ٢س^{٤} - ٧س^{٢} + ٢س + ٥$ فان

$\bar{ق}(س) = ١٥س^{٤} + ٨س^{٣} - ١٤س + ٢$

٥) اذا كان كل من ق ، ل تطبيقا قابلا للاشتقاق وكان ع = ق ⊙ ل فان

$\bar{ع} = (ق ⊙ \bar{ل}) ⊕ (ل ⊙ \bar{ق})$

(مشتقة حاصل ضرب تطبيقين = الاول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الاول)

مثال/ $ع(س) = (س^{٢} - ٣س + ٢)(س^{٣} + ٢س^{٢} - ٦س)$ جد $\bar{ع}(٣)$ ، $\bar{ع}(٢)$

الحل/ ليكن $ل(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} - ٦س$ وليكن $ق(س) = س^{٢} - ٣س + ٢$

$\bar{ل}(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ٦$ $\bar{ق}(س) = ٢س - ٣$

∵ $ع(س) = ق(س) \cdot ل(س)$

∴ $\bar{ع}(س) = (س^{٢} - ٣س + ٢)(٣س^{٢} + ٤س - ٦) + (س^{٣} + ٢س^{٢} - ٦س)(٢س - ٣)$

∴ $\bar{ع}(٣) = (٩ - ٩ + ٢)(٢٧ + ١٢ - ٦) + (٢٧ + ١٨ - ١٨)(٦ - ٣) = ١٤٧$

$\bar{ع}(٢) = ٤$

٦) اذا كان كل من ق ، ل تطبيقا قابلا للاشتقاق وكان $ع(س) = \frac{ق(س)}{ل(س)}$

بشرط $ل(س) \neq$ صفر فان

$$\bar{ع}(س) = \frac{ل(س) \cdot \bar{ق}(س) - ق(س) \cdot \bar{ل}(س)}{\left(ل(س)\right)^{٢}}$$

مثال/ جد $\frac{د}{دس}\left(\frac{٢س^{٢} - ٣س}{س^{٢} + ٣}\right)$

ليكن $ق(س) = ٢س^{٢} - ٣س$ وليكن $ل(س) = س^{٢} + ٣$

ولتكن $ع(س) = \frac{٢س^{٢} - ٣س}{س^{٢} + ٣}$ ،

∵ $\bar{ق}(س) = ٤س - ٣$ ، $\bar{ل}(س) = ٢س$

$$∴ \bar{ع}(س) = \frac{(س^{٢} + ٣)(٤س - ٣) - (٢س^{٢} - ٣س) \times ٢س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$$

$$= \frac{٣س^{٢} + ١٢س - ٩}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$$

٧) اذا كان ن ∈ ط⁺ وكان $ق(س) = س^{-ن}$ بشرط س ≠ صفر فان

$\bar{ق}(س) = -ن س^{-ن-١}$

٨) ليكن كل من ق ، ل ، ع تطبيقا بحيث $ع(س) = ق[ل(س)]$

ولنفرض ان ق ، ل قابلا للاشتقاق ∴ فان ع قابلا للاشتقاق وان

$\bar{ع}(س) = \bar{ق}[ل(س)] \cdot \bar{ل}(س)$

نتيجة / اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}}$ حيث ن عددا صحيحا موجبا فان

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,[\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}-1}\,\text{ل}'(\text{س})$$

مثال: جد $\text{ق}'(\text{س})$ اذا علمت ان $\text{ق}(\text{س}) = \left(\frac{٣\text{س}-٢}{٢\text{س}+١}\right)^{٧}$ حيث $\text{س} \neq -\frac{١}{٢}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٧\left(\frac{٣\text{س}-٢}{٢\text{س}+١}\right)^{٦}\left(\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{٣\text{س}-٢}{٢\text{س}+١}\right)\right)$$

ولايجاد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{٣\text{س}-٢}{٢\text{س}+١}\right)$ نطبق نظرية ٦

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = ٧\left(\frac{٣\text{س}-٢}{٢\text{س}+١}\right)^{٦}\frac{(٢\text{س}+١)\times ٣-(٣\text{س}-٢)\times ٢}{(٢\text{س}+١)^{٢}}$$

$$= \frac{٤٩(٣\text{س}-٢)^{٦}}{(٢\text{س}+١)^{٨}}$$

مثال ٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢)^{٤}$ فجد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل/ $\text{ق}'(\text{س}) = ٤(\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢)^{٣}(٢\text{س}+٣)$ لان مشتقة $(\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٢)$ تساوي $٢\text{س}+٣$

مثال ٣) جد $\text{ع}'(\text{س})$ اذا كان $\text{ع}(\text{س}) = (\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣)^{١٦}(٢\text{س}+٥)^{١٣}$

ليكن $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣)^{١٦}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = (٢\text{س}+٥)^{١٣}$ وسوف نستخدم نظرية ٥

$$\text{ع}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})\cdot\text{ل}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س}) \quad \ldots (١)$$

حيث $\text{ق}'(\text{س}) = ١٦(\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣)^{١٥}(٢\text{س}+٢)$

$$\text{ل}'(\text{س}) = ١٣(٢\text{س}+٥)^{١٢}(٢)$$

وبالتعويض في (١) نحصل على:

$$\text{ع}'(\text{س}) = (\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣)^{١٦}\times ٢٦(٢\text{س}+٥)^{١٢} + (٢\text{س}+٥)^{١٣}\times ٣٢(\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣)^{١٥}\times(\text{س}+١)$$

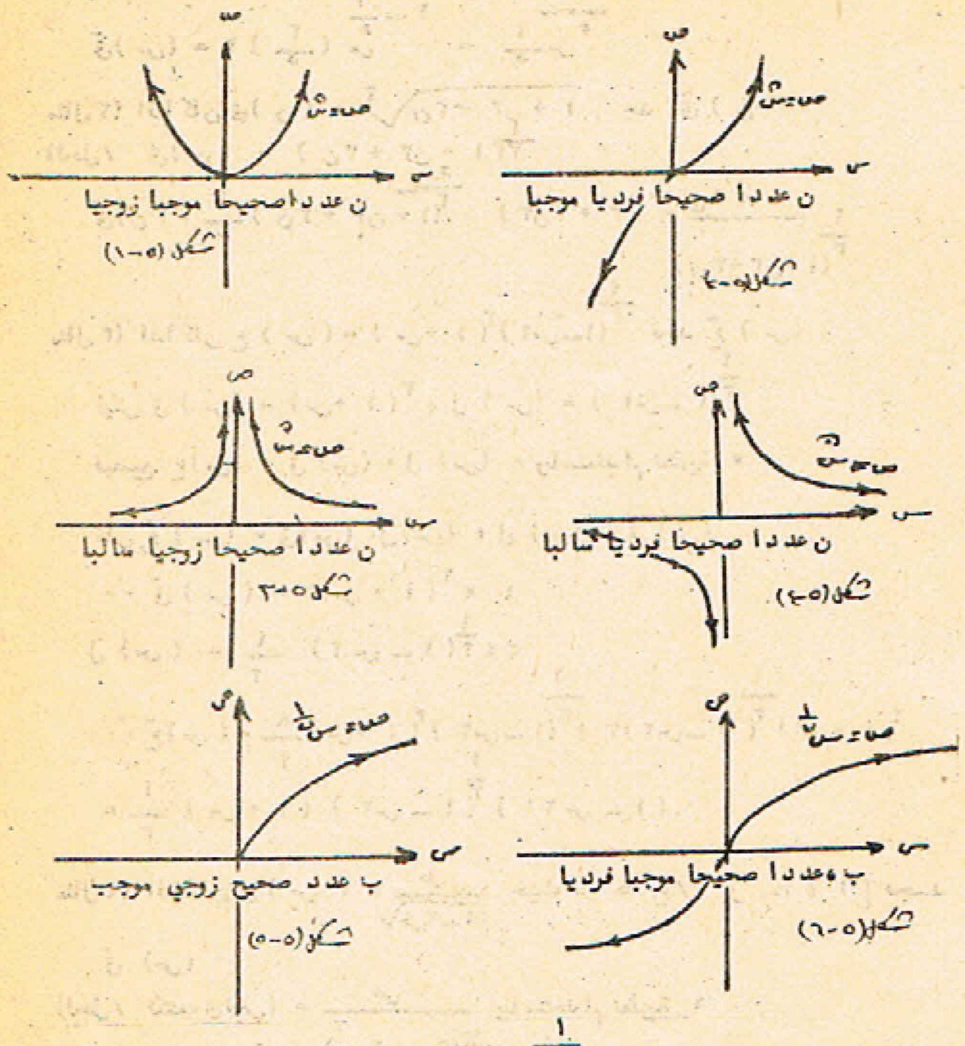
التطبيق الاسي

$$\text{ق}: \text{ح} \longrightarrow \text{ح}^{+} \text{ بحيث } \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$$

اذا كان ن عددا صحيحا موجبا زوجيا فان المخطط الديكارتي لهذا التطبيق يظهر كما في شكل (٥ـ١) واذا كان ن عددا صحيحا فرديا موجبا فان المخطط الديكارتي له كما في شكل (٥ـ٢) واذا كان ن عددا صحيحا سالبا زوجيا فان المخطط الديكارتي له كما في شكل (٥ـ٣) واذا كان ن عددا صحيحا سالبا فرديا فان المخطط الديكارتي لهذا التطبيق كما في شكل (٥ـ٤)

اما اذا كان $\text{ن} = \frac{١}{\text{ب}}$ حيث ب عددا صحيحا موجبا .. فهنا اما ان يكون ب زوجيا وفي هذه الحالة يكون التطبيق معرفا في الاعداد الحقيقية غير السالبة والمخطط الديكارتي له كما في الشكل (٥-٥) .

او ان يكون ب فرديا وفي هذه الحالة يكون معرفا $\forall$ س $\in$ ح ، ويكون المخطط الديكارتي له كما في شكل (٥ - ٦)



نظرية ٩) اذا كان ق (س) = $س^{\frac{1}{ب}}$ حيث ب عدد صحيحا يختلف عن الصفر فان ق̄ (س) = $\frac{1}{ب}$ $س^{\frac{1}{ب}-1}$

نتيجة ١) اذا كان ق(س) = $س^{\frac{أ}{ب}}$ فان ق̄(س) = $\frac{أ}{ب}$ $س^{\frac{أ}{ب}-1}$

حيث أ عددا صحيحا ، ب عددا صحيحا $\neq$ صفرا ...

نتيجة ٢) اذا كان ق (س) = $[ل(س)]^{ر}$ وان ر عددا نسبيا فان

$$\bar{ق}(س) = ر \left[ل(س) \right]^{ر-1} \times \bar{ل}(س)$$

مثال ١) ليكن $ق(س) = ٢ \sqrt[٥]{س^٣}$ جد $\bar{ق}(س)$

الحل/ $ق(س) = ٢ س^{\frac{٣}{٥}}$

$$\bar{ق}(س) = ٢ \left(\frac{٣}{٥}\right) س^{\frac{٣}{٥} - ١} = \frac{٦}{٥} س^{-\frac{٢}{٥}}$$

مثال ٢) اذا كان $ق(ن) = \sqrt[٣]{ن^٣ + ٣ن^٢ + ١}$ جد $\bar{ق}(ن)$

الحل/ $ق(ن) = (ن^٣ + ٣ن^٢ + ١)^{\frac{١}{٣}}$

$$\bar{ق}(ن) = \frac{١}{٣}(ن^٣ + ٣ن^٢ + ١)^{-\frac{٢}{٣}} (٣ن^٢ + ٦ن) = \frac{ن^٢ + ٢ن}{(ن^٣ + ٣ن^٢ + ١)^{\frac{٢}{٣}}}$$

مثال ٣) اذا كان $ع(س) = (س + ١)^٣ (٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}$ فجد $\bar{ع}(س)$

ليكن $ق(س) = (س + ١)^٣$ ، $ل(س) = (٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}$

فيصبح $ع(س) = ق(س) \cdot ل(س)$ • وباستخدام نظرية ٥

فان $\bar{ع}(س) = ق(س) \cdot \bar{ل}(س) + ل(س) \cdot \bar{ق}(س)$

$\therefore \bar{ق}(س) = ٣(س + ١)^٢ \times ١$

$\bar{ل}(س) = \frac{٤}{٣} (٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} \times ٢$

$$\therefore \bar{ع}(س) = \frac{٨}{٣}(س + ١)^٣ (٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} + ٣(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}} (س + ١)^٢$$

$$= \frac{١}{٣}(س + ١)^٢ (٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} (٢٦س - ١)$$

مثال ٤) اذا كان $ق(س) = \frac{ص}{\sqrt{ص^٢ - ١}}$ حيث $ص \in ح / [-١ ، ١]$ فجد $\bar{ق}(ص)$

الحل/ نكتب $ق(ص) = \frac{ص}{(ص^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}}}$ وباستخدام نظرية ٦

$$\bar{ق}(ص) = \frac{(ص^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}} \times ١ - ص \times \frac{١}{٢}(ص^٢ - ١)^{-\frac{١}{٢}} (٢ص)}{ص^٢ - ١}$$ وبضرب البسط

والمقام في $(ص^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}}$ ينتج

$$ان\ \bar{ق}(ص) = \frac{(ص^٢ - ١)^{١} - ص^٢ (ص^٢ - ١)^{صفر}}{(ص^٢ - ١)^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{-١}{(ص^٢ - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$$

نظرية ١٠) اذا كان $ق(س) = \dfrac{أ}{[ل(س)]^{ن}}$ ، $ل(س) \neq ٠$ ، $ن \neq ٠$

فان $\bar{ق}(س) = \dfrac{-أ ن \cdot \bar{ل}(س)}{[ل(س)]^{ن+1}}$

مثال ١) اذا كان $ق(س) = \dfrac{٤}{(س^{٢} + ٣)^{٣}}$ فان $\bar{ق}(س) = \dfrac{-٤ \times ٣ (٢س)}{(س^{٢} + ٣)^{٤}}$

$= \dfrac{-٢٤ س}{(س^{٢} + ٣)^{٤}}$

مثال ٢) اذا كان $ق(س) = \dfrac{٨}{س^{٤} + س^{٢} + ٤}$ فان $\bar{ق}(س) = \dfrac{-٨ (٤س^{٣} + ٢س)}{(س^{٤} + س^{٢} + ٤)^{٢}}$

نتيجة) اذا كان $ق(س) = \dfrac{أ}{ب س^{ن}}$ ، $ب \neq ٠$ ، $ن \neq ٠$ ، $س \neq ٠$

فان $\bar{ق}(س) = \dfrac{-أ ن}{ب س^{ن+1}}$

مثال ١) اذا كان $ق(س) = \dfrac{٤}{٣س^{٢}}$ فان $\bar{ق}(س) = \dfrac{-٨}{٣س^{٣}}$

مثال ٢) اذا كان $ق(س) = \dfrac{٣}{س} - \dfrac{٤}{٥س^{٢}} + \dfrac{٧}{٢س^{٣}} - \dfrac{١٢}{س^{٤}}$ ، $س \neq ٠$

فان $\bar{ق}(س) = -\dfrac{٣}{س^{٢}} + \dfrac{٨}{٥س^{٣}} - \dfrac{٢١}{٢س^{٤}} + \dfrac{٥٢}{س^{٥}}$

التفاضل الضمني Implicit Differentiation

تعطى عادة معادلة منحنى مستو على اشكال مختلفة ، ففي الاحداثيات الديكارتية (س ، ص) اما ان تعطى بالشكل الظاهري :-

ص = ق (س) Explicit Functions وجميع التطبيقات والدوال التي تعاملنا بها يمكن التعبير عن ص بدلالة س بصورة واضحة ، ولكن غالبا ما تصادفنا معادلات من الشكل :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$ ، $ص^{٢} = مل$ ، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣$ ... وهو ما يسمى بالشكل الضمني : $ق(س ، ص) = صفر$ Implicit Functions حيث لا يمكن فيها التعبير عن ص بدلالة س بصورة واضحة .. وذلك عند تعويضنا عنها س بقيمة

واحد نحصل على قيم واحدة لـ ص او اكثر ، وفي هذه الحالة نقول ان ص دالـــة ضمنية الى س او اكثر .

وفي الحقيقة انه يمكن حل كل من المعادلات السابقة والحصول على ص بدلالة س ، الا ان هذا لايتم دائما اذ توجد بعض المعادلات التي يكون فيها من المتعذر ايجـــاد ص بدلالة س مثل .

س^{9} + ٤س ص^{3} ــ ٣ص^{5} = ٢

الا اننا نريد استخراج $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في هذه المعادلة تسمى طريقة ايجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لهذه المعادلة بالاشتقاق الضمني ، والطريقة هي

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = - \frac{\text{المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة لـ س}}{\text{المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة لـ ص}} = - \frac{\text{ق}_{\text{س}}(\text{س ، ص})}{\text{ق}_{\text{ص}}(\text{س ، ص})}$$

= ــ <u>مشتقة الدالة بالنسبة لـ (س) على اعتبار ص كمية ثابتة</u>

مشتقة الدالة بالنسبة لـ (ص) على اعتبار س كمية ثابتــة

وشرط ق$_{\text{ص}}$ (س ، ص) $\neq$ صفر

مثال) اذا كان س^{9} + ٤س ص^{3} ــ ٣ص^{5} ــ ٢ = صفر فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

ق$_{\text{س}}$ (س ، ص) = ٩س^{8} + ٤ص^{3}

ق$_{\text{ص}}$ (س ، ص) = ١٢ س ص^{2} ــ ١٥ص^{4}

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-(\text{٩س}^{8} + \text{٤ص}^{3})}{\text{١٢س ص}^{2} - \text{١٥ص}^{4}}$$

مثال ٢) اذا كان ص^{2} + س^{2} ــ ٩ = ٠ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

ق$_{\text{س}}$(س ، ص) = ٢س اعتبرنا ص ثابتة

ق$_{\text{ص}}$ (س ، ص) = ٢ص اعتبرنا س ثابتة

وعندما يكون ص $\neq$ ٠ فان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = - \frac{\text{٢س}}{\text{٢ص}} = - \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

مثال ٣) اذا كان ٣س^{3}ص^{2} ــ ٢س ــ ٣ص + ١٩٧٦ = ٠ فجـــد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل/ $ق_{س}(س ، ص) = ٩س^{٢}ص^{٢} - ٢$ ، $ق_{ص}(س ، ص) = ٦ص س^{٣} - ٣$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = -\frac{٩س^{٢}ص^{٢} - ٢}{٦س^{٣}ص - ٣}$$.

مثال ٤) جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (١ ، ١) اذا علمت ان $س^{٢} + ٣س + ص^{٣} + ٣ص - ٨ = ٠$

الحل) $ق_{س}(س ، ص) = ٣س^{٢} + ٣$ ، $ق_{ص}(س ، ص) = ٣ص^{٢} + ٣$

$$\frac{دص}{دس} = -\frac{٣س^{٢} + ٣}{٣ص^{٢} + ٣} = -\frac{س^{٢} + ١}{ص^{٢} + ١}$$

$$\therefore \left.\frac{دص}{دس}\right]_{(١ ، ١)} = -\frac{١ + ١}{١ + ١} = -١$$

مثال ٥) جد معادلة المماس لمنحني الدالة $س^{٢}ص^{٢} - ٣س - ٣ص - ١ = ٠$ عند (−١ ، ١)

$ق_{س}(س ، ص) = ٢س ص^{٢} - ٣$ ، $ق_{ص}(س ، ص) = ٢س^{٢}ص - ٣$

$$\frac{دص}{دس} = -\frac{٢س ص^{٢} - ٣}{٢س^{٢}ص - ٣}$$

$$\therefore \left.\frac{دص}{دس}\right]_{(-١ ، ١)} = -\frac{-٢ - ٣}{٢ - ٣} = -٥$$ ميل المماس

$\therefore$ معادلة المماس هي $ص - ١ = -٥(س + ١)$

$٥س + ص + ٤ =$ صفر

الدوال الوسيطية (البارامترية) Parametric Functions

قد تعطى معادلة المنحني بالشكل الوسيطي

$ص = ص(ن)$ ، $س = س(ن)$

ومن الامثلة على مثل هذه الدوال هي

$س = حتاهـ$ ، $ص = حاهـ$ $\forall$ هـ $\in$ ح

فان منحني هذه الدالة هو دائرة نصف قطرها (١) وحدة ومركزها نقطة الاصل ..

(ولقد سبق التاكيد على هذه الدالة في كتاب المثلثات المعاصرة للصف الخامس العلمي)

ويمكن ربط هذه الدالة وتحويلها الى دالة ضمنية بالصورة التالية :ـ

$حا^{٢}هـ + حتا^{٢}هـ = ١$

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$س^{٢} + ص^{٢} - ١ =$ صفر

واذا اردنا ايجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لهذه الدالة نقول

اذا كان كل من ص (ن) ، س (ن) قابلة للاشتقاق ∀ ن ∈]أ ، ب[
وان س̄ (ن) ≠ صفر فان

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}$$

مثال ١) اذا كانت س (ن) = ن٣ + ٣ن + ١ ، ص (ن) = ن٣ − ٣ن + ١
نجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل) $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣\text{ن}^٢ + ٣ \quad ، \quad \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣\text{ن}^٢ - ٣$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دن}}}{\frac{\text{دس}}{\text{دن}}} = \frac{٣\text{ن}^٢ - ٣}{٣\text{ن}^٢ + ٣} = \frac{\text{ن}^٢ - ١}{\text{ن}^٢ + ١}$$

مثال ٢) اذا كان ص = ٢هـ٢ − هـ وكان س = ٤هـ٣ − ٢هـ + ١ نجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة حيث هـ = ٢

الحل) $\frac{\text{دص}}{\text{دهـ}} = ٤\text{هـ} - ١ \Big]_{\text{هـ}=٢} = ٤ \times ٢ - ١ = ٧$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دهـ}} = ١٢\text{هـ}^٢ - ٢ \Big]_{\text{هـ}=٢} = ١٢ \times ٤ - ٢ = ٤٦$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Big]_{\text{هـ}=٢} = \frac{٧}{٤٦} \text{ ميل المماس}$$

عندما هـ = ٢ فان س = ٢٩ ، ص = ٦

∴ نقطة التماس (٢٩ ، ٦)

معادلة المماس $\frac{٧}{٤٦} = \frac{\text{ص} - ٦}{\text{س} - ٢٩}$

٧س − ٢٠٣ = ٤٦ص − ٢٧٦

٧س − ٤٦ص + ٧٣ = ٠

ان المشتقة ق'' للتطبيق ق' هي تطبيق ايضا ·

فاذا كان ق' :]م ، هـ[⟵ ح تطبيقا مستمرا وليكن أ ∈]م ، هـ[

ق' قابلا للاشتقاق عند أ ⟺ $\underset{ع \to ٠}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}'(\text{أ}+\text{ع}) - \text{ق}'(\text{أ})}{\text{ع}}$

ويرمز الى $\underset{ع \to ٠}{\text{غا}} \dfrac{\text{ق}'(\text{أ}+\text{ع}) - \text{ق}'(\text{أ})}{\text{ع}}$ بالرمز ق''(أ)

ويمكن كتابته بالشكل $\left[\dfrac{\text{د}^٢ (\text{ق}(\text{س}))}{\text{د س}^٢}\right]_{\text{س}=\text{أ}}$

فمثلا اذا كان ق(س) = $\text{س}^٣$

فان ق'(س) = $٣\text{س}^٢$

وان ق''(س) = ٦س

فاذا استمرينا بايجاد اشتقاق التطبيق ق الى ن من المرات فان المشتقة هـي

$\dfrac{\text{د}^\text{ن} (\text{ق}(\text{س}))}{\text{د س}^\text{ن}}$

مثال) اذا كان ق(س) = $\text{س}^٣$ فاثبت ان

ق''(س) · ق'(س) ــ ١٨ ق(س) = صفر

الحل) ق'(س) = $٣\text{س}^٢$

ق''(س) = ٦س

∴ ق''(س) · ق'(س) = ($٣\text{س}^٢$) (٦س) = $١٨\text{س}^٣$

∴ ق''(س) · ق'(س) ــ $١٨\text{س}^٣$ = صفر

∴ ق''(س) · ق'(س) ــ ١٨ ق(س) = صفر

تمارين

جد مشتقة كل مما يلي بالنسبة لمتغيرها المستقل

١) ق(س) = $\text{س}^٣ - ٣\text{س} + ٤$

٢) ق(س) = $\dfrac{\text{س}^٣ - ٣\text{س} + ٤}{١٢}$

٣) ق(س) = $\dfrac{-١٢}{\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١

٤) ق(س) = $\dfrac{\text{س}}{٢} + \dfrac{٢}{\text{س}^٥}$ ، س ≠ ٠

٥) ق(نق) = $\dfrac{\text{ط}}{٣}$ نق، (٦٤ ــ $\text{نق}^٢$)

٦) ق(ل) = ٣ل $\sqrt{١٢ - \text{ل}^٢}$ ل ∈ [ــ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢ $\sqrt{٣}$]

٧) $ق(س) = \frac{٥س^٢ - ٧س - ١٢}{٣س^٩}$ ، $س \neq ٠$

٨) $ق(س) = \sqrt{١٢^٢ + (٢٠ - س)^٢} + \sqrt{١٨^٢ + س^٢}$ وجد قيمة س عند ما $\bar{ق}(س) = $ صفر .

٩) $ح(نق) = \frac{٨١ط}{نق} + ط\,نق^٣$ حيث $نق \neq ٠$. ثم جد قيمة نق والتي عند هـــا $\bar{ح} = $ صفر

١٠) $ق(س) = (٣ - ٢س)\sqrt{س}$ حيث $س > ٠$.

١١) $ق(س) = (٢س + ٣) \cdot \sqrt{س^٢ + ٤}$

١٢) $ق(س) = \sqrt{\frac{١ + ٢س}{١ - ٢س}}$ $\forall\, س \in\,]-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}[$

١٣) $ق(س) = (س - ٢)^٣ (س + ١)^٤$ ثم جد قيمة س التي تجعل $\bar{ق}(س) = $ صفر

١٤) ليكن $ق : ح^{++} \longrightarrow ح$ بحيث $ق(س) = \frac{س - ١}{س + ١}$

$ل : ح^{++} \longrightarrow ح$ بحيث $ل(س) = \sqrt{س}$

جد ١) $(ق \circ ل)'(س)$

٢) $(ق \odot ل)'(س)$

٣) $(ق \oplus ل)'(٤)$

٤) $(ق \oslash ل)'(٤)$

١٥) جد ميل المماس للمنحنى $٢س^٢ - ٣س ص + ٢ص^٢ = ٢$ عند النقطة $(-١ ، \frac{-٣}{٢})$.

١٦) جد $\frac{دص}{دس}$ للعلاقة $|ص^٢ - ٣س ص| - ١ = $ صفر

١٧) اذا كان $ق : ح / \{٠\} \longrightarrow ح$ بحيث $ق(س) = أس^٣ + ب س^٢$ حيث كل من أ ، ب عددا حقيقيا ثابتا فبرهن ان $س^٢ \ddot{ق}(س) - ٤س \bar{ق}(س) + ٦ق(س) = $ صفـــر .

١٨) اذا كان $ق : ح^{++} \longrightarrow ح$ بحيث $ق(س) = أس + ب\sqrt{س} + \frac{حـ}{س}$ ،

فبرهن على ان :-

$٢س^٣ ق'''(س) + ٥س^٢ ق''(س) - س ق'(س) + ق(س) = $ صفر

١٩) اذا كان $ق(س) = (١ - ٥س)^٦$ فاثبت ان

$(١ - ٥س)\bar{ق}(س) + ٣٠ ق(س) = $ صفر

٢٠) اذا كان ص(ن) = ن٤ + ١ ، س(ن) = ن٢ + ٣ن٣ ، ن $\neq$ صفر

نجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

٢١) جد $\frac{\text{د}^{2}\text{ص}}{\text{د س}^{2}}$ عند النقطة (ــ ١ ، ١) للمنحني س٢ ص + ٣ص ــ ٤ = ٠

تطبيقات على المشتقــة

اولا ــ المماس والعمود عليه

لقد درسنا في بند سابق المعنى الهندسي للمشتقة وتعريف المماس والعمود عليه والان سنورد بعض الامثلة الايضاحية الاخرى بعد ان تعلمنا ايجاد المشتقة باستخدام النظريات

مثال ١) جد معادلة المستقيم المماس لبيان التطبيق ق(س) = $\frac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٤}$

عند نقطة تقاطعه مع المحور الثاني

الحل) نجد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الثاني

اى ق(٠) = ــ ١

∴ نقطة التماس (٠ ، ــ ١)

والان لنجد ميل المماس

$$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢}+٤) \times ١ - (\text{س}-٤) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٤)^{٢}} = \frac{-\text{س}^{٢} + ٨\text{س} + ٤}{(\text{س}^{٢}+٤)^{٢}}$$

$\bar{\text{ق}}(٠) = \frac{١}{٤}$ = ميل المماس عند س = ٠

$$\text{ل} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}} \Longleftarrow \frac{١}{٤} = \frac{\text{ص} + ١}{\text{س} - ٠}$$

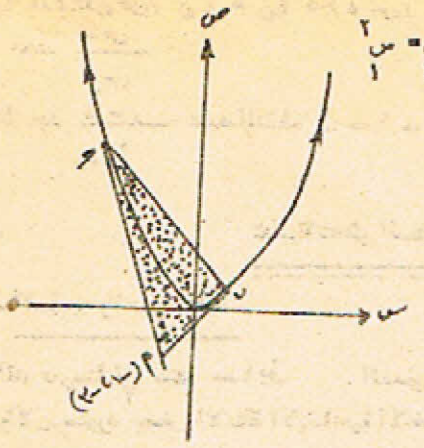
$\Longleftarrow$ س ــ ٤ص ــ ٤ = صفر

مثال ٢) ليكن ق (س) = س٢ ، رسم المماسان أ ب ، أ حـ لبيان التطبيق من نقطــة أ (ــ ١ ، ــ ٣) فلاقياه في ب، حـ

١) جد معادلتي كل من المماسين أ ب ، أ حـ

٢) جد مساحة المثلث أ ب حـ

الحل) النقطة أ(ــ١ ، ــ٣) لاتقع على بيان التطبيق لانها لاتحقق بيانه



لنفترض أن النقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1) \in \text{ق} \Leftarrow \text{ص}_1 = \text{س}_1^2$

ولنجد المماس عندها والمار من $(-1 ، -3)$

$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = 2\text{س}$

$\bar{\text{ق}}(\text{س}_1) = 2\text{س}_1 =$ ميل المماس عند النقطة $(\text{س}_1 ، \text{س}_1^2)$

$$\text{ل} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$$

$$2\text{س}_1 = \frac{\text{ص} - \text{س}_1^2}{\text{س} - \text{س}_1} \quad \cdots\cdots (1)$$

لكن أ$(-1 ، -3) \in$ المماس فهي تحقق معادلته .. فبالتعويض في (١) عن س $= -1$ ، ص $= -3$ ينتج

$$2\text{س}_1 = \frac{-3 - \text{س}_1^2}{-1 - \text{س}_1} \Longleftarrow (\text{س}_1 + 3)(\text{س}_1 - 1) = \text{صفر}$$

اما $\text{س}_1 = -3 \Longleftarrow \text{ص}_1 = 9 \Longleftarrow$ حـ$(-3 ، 9)$

او $\text{س}_1 = 1 \Longleftarrow \text{ص}_1 = 1 \Longleftarrow$ ب$(1 ، 1)$

ولايجاد معادلتي المماسين أب ، أحـ نعوض عن قيمة س_1 بالمعادلة (١) ،

$\text{س}_1 = 1$ تصبح $2 = \frac{\text{ص} - 1}{\text{س} - 1} \Longleftarrow \text{ص} - 2\text{س} + 1 = 0$ معادلة أب

وعندما $\text{س}_1 = -3$ تصبح المعادلة $-6 = \frac{\text{ص} - 9}{\text{س} + 3} \Longleftarrow \text{ص} + 6\text{س} + 9 = 0$ معادلة أحـ

ولايجاد مساحة المثلث أ ب حـ

طول أ ب $= \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ وحدة

الارتفاع $=$ ف $= \frac{|9 - 2 \times -3 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$ وحدة

$\therefore$ المساحة $= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{16}{\sqrt{5}} = 16$ وحدة مربعة

٢) تماس المنحنيات

تعريف / اذا كان ق : ك ⟵ ح تطبيقا قابلا للاشتقاق عند أ ، أ ∈ ك

ع : ل ⟵ ح تطبيقا قابلا للاشتقاق عند أ ، أ ∈ ل

وكان ك ∩ ل = حـ حيث حـ ⊂ ح غيرخالية

ق يمس ع عند أ ، أ ∈ حـ ⟺ ١) قَ (أ) = لَ (أ)

٢) ق (أ) = ل (أ)

اى ان الشرط اللازم والكافي لتماس بياني تطبيق هو :ـ

١) ق ∩ ع ≠ ∅

اى يشتركان في نقطة واحدة على الاقل

٢) ميلاهما متساويان في تلك النقطة

مثال ١) اذا كان المستقيم ص = ٤س ـ ٣ مماسا لبيان التطبيق

ق(س) = $س^{٢}$ ـ ٤س + ٢أ نجد قيمة العدد الثابت أ

الحل/ ليكن ص = ل (س) = ٤س ـ ٣

لنفترض انهما يتماسان عند س = ب

∴ قَ (ب) = لَ (ب)

قَ (س) = ٢س ـ ٤ ⟸ قَ (ب) = ٢ب ـ ٤

لَ (س) = ٤ ⟸ لَ (ب) = ٤

ومن الشرط الاول للتماس نحصل على ٢ب ـ ٤ = ٤ ⟸ ب = ٤ ... (١)

ومن الشرط الثاني للتماس نحصل على ق (ب) = ل (ب)

اى ٤ ب ـ ٣ = $ب^{٢}$ ـ ٤ب + ٢أ

اى ٢أ = ٨ ب ـ $ب^{٢}$ ـ ٣

وبالتعويض عن ب ينتج ٢أ = ٨ × ٤ ـ $٤^{٢}$ ـ ٣ = ١٣

∴ أ = $\frac{١٣}{٢}$

مثال ٢) جد نقطة يشترك بها بياني التطبيق ق(س) = $س^{٢}$ ـ ٧ ، ل (س) = ٢$س^{٢}$ ـ ٤س ـ ٣ وبين انها نقطة تماس .

١) نجد ق ∩ ل

ليكن ق (س) = ل (س) ⟸ $س^{٢}$ ـ ٧ = ٢$س^{٢}$ ـ ٤س ـ ٣

⟸ $(س ـ ٢)^{٢}$ = ٠

⟸ س = ٢

∴ ق (٢) = ل (٢) = ـ ٣ ،

∴ ق ∩ ل = { (٢ ، ـ ٣) }

٢) نجد قَ (٢) ، لَ (٢) .

قَ (س) = ٢س ، قَ (٢) = ٤

لَ (س) = ٤س ـ ٤ ، لَ (٢) = ٤

∴ ق يمس ل

مثال ٣) اذا كان المستقيم ٢س ـ ص ـ ٣ = ٠ مماسا لبيان التطبيق ق(س) = أس^{٢} + ب س ـ ٤ عند س = ١ (١) جد قيم أ ، ب (٢) برهن ان ق محدود من الاعلى (٣) برهن ان ق متزايد ∀ س < ٢

الحل)

١) ٢ × ١ ـ ص ـ ٣ = ٠ ⟸ ص = ـ ١

∴ نقطة التماس (١ ، ـ ١)

ميل المستقيم = ٢

قَ (س) = ٢ أ س + ب

قَ (١) = ٢ أ × ١ + ب = ٢

∴ ٢ أ + ب = ٢ ..... (١)

لكن (١ ، ـ ١) ∈ ق ∴ يحقق معادلته

∴ ـ ١ = أ + ب ـ ٤

أ + ب = ٣ ..... (٢)

وبحل المعادلتين (١) و (٢) انيا نجد أ = ـ ١ ، ب = ٤

(٢) ∵ ق (س) = ـ س^{٢} + ٤س ـ ٤

= ـ (س^{٢} ـ ٤س + ٤)

= ـ (س ـ ٢)^{٢}

و ∵ ∀ س ∈ ح فان (س ـ ٢)^{٢} ≥ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)

∴ ـ (س ـ ٢)^{٢} ≤ صفر

ق (س) ≤ صفر ∀ س ∈ ح

∴ ق محدود من الاعلى .

(٣) س$_{١}$ < ٢ ، س$_{٢}$ < ٢

اذا كان س$_{١}$ < س$_{٢}$ < ٢ ⟸(باضافة ـ ٢) س$_{١}$ ـ ٢ < س$_{٢}$ ـ ٢ < صفر ⟸(بالتربيع)

(س$_{١}$ ـ ٢)^{٢} > (س$_{٢}$ ـ ٢)^{٢} > صفر ⟸(بالضرب × ـ ١)

ـ (س١ ـ ٢)^٢ > ـ (س٢ ـ ٢)^٢ > صفر ⇐ ق(س١) > ق (س٢)

⇐ ق متزايد ∀ س > ٢

مثال ٤) ليكن ق (س) = أ س٣ + ب س٢ + حـ س + د ٠ رسم مماسان الى بيان ق الاول عند النقطة م (٢ ، ١٥) والثاني عند النقطة ن (ـ ٢ ، ـ ١٧) بحيث ان كلا منهما يوازى المستقيم ص + ٤ = صفر ٠٠ علما بان م ، ن ∋ ق

برهن ان (ـ ١ ، ـ ٢) ∋ ق ٠

الحل) يجب ان نجد كلا من أ ، ب ، حـ ، د

∵ م ∋ ق ∴ تحقق معادلته ⇐ ٨أ + ٤ب + ٢حـ + د = ١٥ ٠٠٠ (١)

بالطرح ∵ ن ∋ ق ∴ تحقق معادلته ⇐ ـ ٨أ + ٤ب ـ ٢حـ + د = ـ ١٧ ٠٠٠ (٢)

٤أ + حـ = ٨ ٠٠٠٠ (٣)

∵ ميل المستقيم (ص + ٤ = ٠) = صفراً (لانه يوازى المحور الاول)

∴ ميل كل من المماسين = صفرا ايضا (اذا توازى مستقيمان تساوى ميلاهما) ٠

قَ (س) = ٣ أس٢ + ٢ب س + حـ

قَ (٢) = ١٢أ + ٤ب + حـ = صفر ٠٠٠ (٤)

قَ (ـ٢) = ١٢أ ـ ٤ب + حـ = صفر ٠٠٠ (٥) بالجمع والتبسيط نحصل على

١٢أ + حـ = صفر ٠٠٠٠٠ (٦)

ومن حل المعادلتين (٣) ، (٦) ينتج ان أ = ـ ١ ، حـ = ١٢ وبالتعويض في (٤) ينتج ان ب = صفر وبالتعويض في ١) ينتج ان د = ـ ١

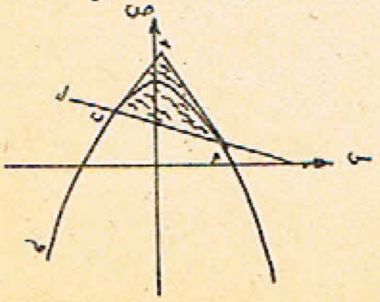
∴ ق (س) = ـ س٣ + ١٢س ـ ١

∵ ق (ـ ١) = ـ (ـ ١)^٣ + ١٢(ـ ١) ـ ١ = ـ ١٢

∴ (ـ ١ ، ـ ١٢) ∋ ق ٠

مثال ٥) ليكن ق (س) = ١٠ ـ س٢ وليكن ل (س) = ٤ ـ س ، فاذا كانت ق ∩ ل = { أ ، ب } ورسم عند أ ، ب مماسان للتطبيق ق فالتقيا في نقطة حـ

جد مساحة المثلث أ ب حـ



الحل)

ل (س) = ٤ ـ س ، ق(س) = ١٠ ـ س٢

اذا فان ل (س) = ق (س)

فان ٤ ـ س = ١٠ ـ س٢

اى س٢ – س – ٦ = ٠

∴ (س – ٣) (س + ٢) = ٠

اما س = ٣ أو س = –٢

∴ ص = ١ او ص = ٦

∴ أ (٣ ، ١) ، ب (–٢ ، ٦)

ق (س) = –٢س

قَ (٣) = –٢ × ٣ = –٦ ميل المماس عند أ

∴ معادلته –٦ = $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٣}$ ⟸ ص + ٦س – ١٩ = ٠ ...... (١)

قَ (–٢) = ٤ ميل المماس عند ب

∴ معادلته ٤ = $\frac{\text{ص} - ٦}{\text{س} + ٢}$ ⟸ ص – ٤س – ١٤ = ٠ ...... (٢)

ومن حل المعادلتين (١) و (٢) انيا نجد حـ (½ ، ١٦)

د (أ ، ب) = $\sqrt{(\text{س}_١ - \text{س}_٢)^٢ + (\text{ص}_١ - \text{ص}_٢)^٢}$ = $\sqrt{(٣ + ٢)^٢ + (١ - ٦)^٢}$ =

٥ $\sqrt{٢}$ وحدة

بعد نقطة حـ عن أب = ف = الارتفاع

ف = $\frac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$ = $\frac{|١ \times ½ - ١ \times ١٦ - ٤|}{\sqrt{١ + ١}}$ = $\frac{٢٥}{٢\sqrt{٢}}$ وحدة

∴ المساحة = ½ القاعدة × الارتفاع = ½ × ٥ $\sqrt{٢}$ × $\frac{٢٥}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{١٢٥}{٤}$

وحدة مربعة .

تماريـــــن

١) النقطتان أ ، ب واقعتان على منحنى التطبيق ق : ح / {١} ⟵ ح وبحيث ق (س) = س + ٥ ـ $\frac{٤}{\quad}$ حيث ميل المماس عند كل منها = ٢ ٠٠ واذا رسم المماسان عند آ ، ب $\frac{١}{}$ بحيـــث قطعا محور السينات في النقطتين حـ ، د على الترتيب ٠ اثبت ان مساحة الشكل أ ب حـ د = ١٦ وحدة مربعـة ٠

٢) مماس التطبيق ق: ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{٩}{س}$ + $\frac{س}{٤}$ عند النقطة التي احداثيها السيني = ٢ ، يقطع المحورين في النقطتين أ ، ب جـــد طول آ ب ٠

٣) جد نقطة على بيان التطبيق ق (س) = س^{٢} ـ ٧س + ٣ يكون عند ها المـــاس لبيان التطبيق موازيا للمستقيم ٥ س + ص = ٣

٤) جد معادلتي المماس والعمودى عليه لبيان التطبيق ق (س) = $\sqrt[٣]{س ـ ١}$ عند النقطة التي احداثيها السيني = + ١

٥) جد النقاط الواقعة على بيان التطبيق ق : ح / {١} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{س^{٢}}{س ـ ١}$ والتي يكون المماس عند ها موازيا للمحور الاول ٠

٦) اثبت ان مماسي المنحني ق (س) = س^{٣} ـ ٣س^{٢} + ٢س ـ ٥ عند النقطتيـــن (٣ ، ٤) ، (ـ ١ ، ـ ١٢) متوازيان ٠

٧) اثبت ان مماسي المنحنى ق (س) = (س ـ ٢) (س + ١) عند النقطتيـــن (١ ، ـ ٢) ، (٠ ، ـ ٢) متعامدان ٠

٨) جد النقاط الواقعة على المنحنى ق(س) = س^{٣} + ٥ والتي يكون المماس للمنحـنى عند ها عمود يا على المستقيم س + ٣ص = ٢

٩) جد النقاط الواقعة على المنحنى ق (س) = $\frac{س ـ ١}{٢س ـ ١}$ ، س $\neq$ ½ بحيـث يصنع المستقيم المماس للمنحنى عندها زاوية مقدارها ٤٥° مع الاتجاه الموجب للمحور الاول ٠

١٠) اذا كان مماسا المنحنى ص = ٣ + ب س ـ س^{٢} عند النقطتين س = ٢ ، س = ٣ متعامدين فجد قيمة ب ٠

١١) رسم مماس للمنحنى س^{٢} ص = ٢ حيث س $\neq$ صفر عند النقطة (١ ، ٢) فلاقى المنحنى مرة اخرى في نقطة ب فجد احداثيي ب ٠

١٢) ليكن ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق (س) = س + $\frac{٨}{س^{٢}}$ ٠٠٠ جد معادلـة المستقيم المماس لبيان ق والذى يصنع مقطعين متساويين مع المحورين ٠

١٢) ليكن ق : ح / { ٠ } ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{16}{س}$

وليكن ل : ح ⟵ ح بحيث ل (س) = − $\frac{س^2}{4}$

ولتكن أ ∈ ق ∩ ل .. عن أ رسمنا مستقيما مماسا لكل من ق ، ل ... جد مساحة المثلث المحدد بالمماسين والمستقيم س − ص = ١٢

١٤) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{1}{1 + س^2}$

وليكن ل : ح / { −١ } ⟵ ح بحيث ل (س) = $\frac{1}{س + 1}$

ولتكن { أ ، ب } = ل ∩ ق

جد معادلتي المماسين المرسومين عن أ ، ب الى بيان ق .

١٥) ليكن ق : ح / { ٠ } ⟵ ح بحيث ق (س) = س − $\frac{1}{س}$ جد معادلتي المماسين المرسومين لبيان ق عند − ١ ، ٣

١٦) برهن ان المماس لبيان ق حيث ب٢ ق (س) = س٢ (أ − س) عند س = $\frac{1}{2}$ أ يمر من نقطة الاصل .

١٧) برهن تماس بياني التطبيق ق(س) = ٢س − ٣ ، ل (س) = ١٠س − ٢س٢ − ١١

١٨) برهن تماس بياني التطبيق ل (س) = س٢ − ١ ، ق(س) = ٨ س − س ٢ − ٩ ثم جد معادلة المستقيم المماس والعمود عليه عن نقطة التماس ومساحة المثلث المحدد بهذين المستقيمين والمحور الاول .

١٩) المستقيم العمود على بيان التطبيق ق (س) = ٤ − س٢ عن النقطة أ(١ ، ٣) يقطعه مرة اخرى في نقطة ب . جد

١) معادلة أب

٢) معادلة المماس لبيان ق عند ب

٣) واذا تلاقى المستقيم المماس للمنحني عند نقطة ب مع العمود عليه من نقطة أ في نقطة جـ نجد مساحة المثلث أ ب حـ

٢٠) ليكن ق : ح / { ١ ، ٢ } ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{1}{س - 1} - \frac{4}{س - 2}$

جد معادلتي المماسين المرسومين لبيان ق عند نقطتي تقاطعه مع المحورين .

٢١) ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = أ س٢ + ب س + حـ ولتكن (١ ، ١) ∈ ق . وعند هذه النقطة يصنع المماس لبيان التطبيق زاوية مقدارها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .. وعند النقطة التي احداثيها السيني = ٢ فان المماس زاوية ميله = ٦٠° نجد أ ، ب ، حـ

٢٢) ليكن ل (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + د فاذا كان هذا المنحنى يمـــــر بالنقطتين ن(٢ ، ٢) ، هـ (ــ ٢ ، ٤) بحيث انه ممكن رسم مماســين يوازيان المحور الاول لبيان ق عندهما، جد كلا من ا ، ب ، حـ ، د

٢٣) ليكن ق(س) = $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ جد نقطة او نقاط ∋ ق بحيث يمكـــن ان يكون المماس عندها يمر بالنقطة (ــ ١ ، ــ ٥) .

٢٤) اذا كان بيان التطبيق ق (س) = ا س^{٢} + ب س + حـ يمس المستقيم ٥س ــ ص = ٣ عند النقطة (٢ ، ٧) ويمر بالنقطة (ــ١ ، ١٠) فجد قيم كل من آ ، ب ، حـ .

٢٥) المستقيم المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٦س ــ ٨ ص = ٠ يمس بيان التطبيـــق ق(س) = أ س^{٢} + ب عند النقطة حـ (٤ ، ٣) ماقيمة كل من آ ، ب .

٢٦) المستقيم المرسوم مماسا لبيان التطبيق ق (س) = س^{٣} ــ س عند النقطة الـــتي احداثيها السيني = ١ يمس الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ ص = حـ جد قيمة حـ ثم جد احداثيي نقطة تماس الدائرة مع المستقيم .

٢٧) لتكن أ هي النقطة (ــ ٢ ، ٤) ولتكن ب ∋ المحور الاول ولتكن حـ ∋ المحور الثاني بحيث ان أ تقسم قطعه المستقيم حـ ب بنسبة ١ : ٢ فاذا كانت ب هـــي نقطة تماس المستقيم أب مع بيان التطبيق ق (س) = د س^{٢} + هـ س + ٣٠ فجـــد قيمة كل من د ، هـ

٢٨) اثبت ان مماسي بيان التطبيق ق (س) = ٥س ــ س^{٢} ــ ٦ عند نقطتي تقاطعـــه مع المحور الاول يكونان متعامدين .

٢٩) اذا كان ق(س) = ٥ ــ س^{٢} ــ س فجد معادلتي المستقيمين المماس والعمود عليه عند س = ١ واثبت ان مساحة المثلث المحدد بالمماس والعمود عليه من نقطة المماس والمحـــور الاول يساوى ١٥ وحدة مربعـــة .

٣٠) اذا كان د(س) = آ س^{٢} + ب س + حـ حيث آ ، ب ، حـ ثوابت وكان د (١) = ٧ ، د(٢) = ٢٢ ، د (٣) = ١٧ جد دَ (٢)

٣١) اذا كان ق (س) = س^{٢} + آ س + ب ، د (س) = حـ س ــ س^{٢} متماســـــان عند النقطة (١ ، ٠) فجد قيم الثوابت أ ، ب ، حـ

٣٢) جد قيمة الثابت حـ والتي تجعل مماس بيان التطبيق ق(س) = س (حـ ــ س^{٢}) في نقطة الاصل يصنع زاوية مقدارها ٤٥ مع الاتجاه الموجب للمحور الاول .

٣٣) جد قيمة الثابت حـ التي تجعل المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، ٣) ، (٥ ، ــ ٢) يمس بيان التطبيق ق(س) = $\frac{حـ}{س + ١}$ حيث س ≠ ــ١

٣٤) اذا كان ق (س) = س٢ + ٣س ــ ٤ وكانت النقطتان أ (١ ، هـ) ، ب (ــ ١ ، د) تقعان على بيان التطبيق • جد نقطة على المنحني بحيث يكون فيها المماس موازيا للمستقيم أب •

٣٥) اذا كان بيان التطبيق ق (س) = أ س٣ + ب س٢ + حـ س + د يمس المستقيمين ص = ٩ س + ١٨ ، ٣س + ص = ٢ عند نقاط تقاطعهما مع محوري السينات والصادات على الترتيب •• فجد كلا من أ ، ب ، حـ ، د

٣٦) بين ان المماسين للمنحنى ٨ ص = (س ــ ٢)^{2} عند النقطتين (٤ ، ½) ، (ــ ٦ ، ٨) يتقاطعان في زاوية قائمة على المستقيم ص = ــ ٢

واذا كانت نقطة التقاطع هي آ اما ب فهي (٢ ، ٢) •• بين ان المستقيم آب يكون عمودا على المستقيم الواصل بين نقطتي التماس •

ثانيا ــ بعض التطبيقات الفيزياوية

اذا كان ق (ن) = م يمثل القانون الذي بموجبه تتحرك كتلة مادية بعد ن من الثواني من بدء حركتها وسوف نطلق عليه اسم التطبيق المساني وعلى خط مستقيم •

فبعد ن وحدة زمنية يكون م$_{1}$ = ق (ن)

وبعد ن + ع وحدة زمنية يكون م$_{2}$ = ق(ن + ع)

وبما ان (م٢ ــ م١) / (ن٢ ــ ن١) = (ق(ن + ع) ــ ق(ن)) / (ن + ع ــ ن) = (ق(ن + ع) ــ ق(ن)) / ع

= ∆م / ∆ن = معدل السرعة

وعندما ع ⟵ صفر فان (ق (ن + ع) ــ ق(ن)) / ع تسمى بالسرعة الانية

∴ غـــايـــة (∆م / ∆ن) عندما ن ⟵ صفر = دم / دن = السرعة الانية = س (ن)

وبما ان التعجيل عند اية لحظة يعرف بانه تغير السرعة بالنسبة للزمن •

∴ ت (ن) = د س / د ن = د^{2}ل / د ن^{2}

اما الانطلاق Speed فيعرف بانه |قَ (ن)| اى انه انطلاق الجسم يعرف بانه قيمة السرعة ويهمل الاتجـــاه •

مثال ١) نقطة مادية تتحرك على خط مستقيم بموجب القانون م (ن) = ١٣٢ + ١٠٨ن ــ ١٦ن٢ + ٣ن٣ • حيث م المسافة بالاقدام ن هو الزمن بالثواني •

ما هي سرعته عندما ن = ٢ ؟ وما هو تعجيله عندما ن = ١ ، ن = ٣

الحل) س(ن) = مَ (ن) = ١٠٨ ــ ٣٢ن + ٩ن٢

ت (ن) = ع (ن) = ـ ٣٢ + ١٨ ن

عندما ن = ٢ فان س (٢) = ١٠٨ ـ ٣٢ × ٢ + ٩ × ٤

= ١٠٨ ـ ٦٤ + ٣٦ = ٨٠ قدم/ ثا

عندما ن = ١ ، ت (١) = ـ ٣٢ + ١٨ = ـ ١٤ قدم/ ثا/ ثا

عندما ن = ٣ ، ت (٣) = ـ ٣٢ + ٥٤ = ٢٢ قد/ ثا / ثا

مثال ٢) نقطة مادية تتحرك بخط مستقيم افقي بموجب القانون

ل (ن) = ن٣ ـ ٩ن٢ + ٢٤ن

آ ـ متى تتزايد الازاحة ومتى تتناقص

ب ـ متى تتزايد السرعة ومتى تتناقص

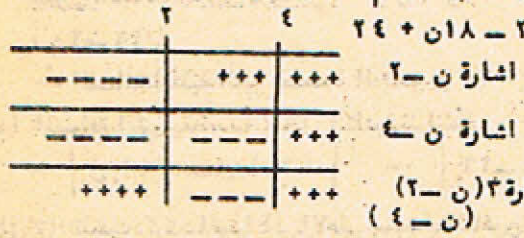
جـ ـ متى تتزايد الانطلاق ومتى تتناقص

د ـ جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم خلال الخمس ثواني الاولى من بدء حركته .

هـ ـ جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم خلال الثانية الرابعة

الحل) س(ن) = $\frac{د ل}{د ن}$ = ٣ن٢ ـ ١٨ن + ٢٤

= ٣(ن ـ ٢) (ن ـ ٤)



وبما ان الازاحة تتزايد

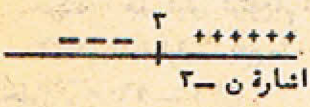
عندما السرعة > صفر

اى عندما ن < ٢ أو ن > ٤

وبما ان الازاحة تتناقص عندما السرعة < صفر

اى عندما ن ∈] ٢ ، ٤ [

ب) ت (ن) = $\frac{د س}{د ن}$ = ٦ن ـ ١٨ = ٦(ن ـ ٣)



وبما ان السرعة تتزايد عندما التعجيل > صفر اى عندما ن > ٣

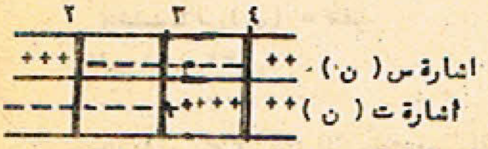
وتتناقص عندما التعجيل < صفر اى عندما ن < ٣

جـ) الانطلاق يتزايد عندما السرعة والتعجيل لهما نفس الاشارة ويتناقص عندما يختلفان في الاشارة ومن المخطط المجاور نستنتج ان الانطلاق يتزايد في ن > ٤

او ن ∈] ٢ ، ٣ [

ويتناقص في ن < ٢

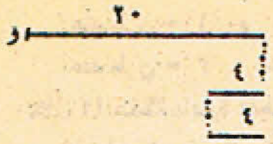
أو في ن ∈] ٣ ، ٤ [



د) النقطة تتحرك الى اليمين من النقطة (و) عندما تكون السرعة موجبة وانها تتحرك نحو اليسار عندما تكون السرعة سالبة •

وهنا عندما ن = صفر فان ل = صفر

ويكون الجسم عند نقطة و



وان بداية الحركة نحو اليمين لان س(ن) > صفر

لاول ثانيتين والتي عندها ل (٢) = ٢٠ قدما ......هـ

من و

وفي خلال الثانيتين التاليتين فسوف يتحرك الجسم نحو اليسار والتي في نهايتها

يكون الجسم على بعد ل (٤) = ١٦ قدما من و

اى يتراجع الى اليسار مسافة ٤ اقدام (٢٠ـ١٦)

وبعد خمس ثوان من المركز يكون الجسم على بعد ل (٥) = ٢٠ قدما من و

ويكون باتجاه اليمين اى يسير ٤ ثوان اخرى نحو اليمين خلال الثانية الخامسة (٢٠ـ١٦)

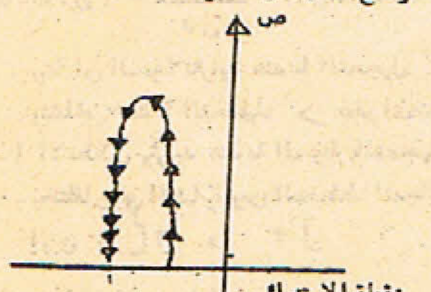
∴ المسافة الكلية التي قطعها الجسم = ٢٠ + ٤ + ٤ = ٢٨ قدم

هـ) المسافة التي يقطعها خلال الثانية الرابعة

= | ل (٤) ـ ل (٣) | = | ١٦ـ ١٨ | = ٢ قدم

مثال ٣) قذفت كرة شاقوليا الى الاعلى بموجب القانون م = ٩٦ن ـ ١٦ن^{٢} حيث م الارتفاع بالاقدام ن الزمن بالثواني (١) جد سرعتها بعد ثانيتين من بدء حركته • هل تبقى ترتفع ام تسقط ؟

٢) كم ثانية تبقى ترتفع ؟ وماهو اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة ؟



الحل) مَ = ٩٦ ـ ٣٢ن

∴ س (ن) = ٩٦ ـ ٣٢ن

س(٢) = ٣٢ قد / ثا

وبما ان السرعة موجبة

∴ الكرة لازالت ترتفع

وعندما س(ن) = صفر

فان ٩٦ـ ٣٢ن = ٠

∴ ن = ٣

وعندما ن > ٣ فان السرعة تصبح سالبة وهذا يعني ان الحركة تكون الى الاسفل اى ان الكرة تسقط وعندما ن = ٣ فان م = ١٤٤ قدم وهو اقصى ارتفاع تصله الكرة •

تماريـــــــن

١) جسم تحرك بخط مستقيم بموجب القانون م = $ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٩ن + ٤$

١) جد الازاحه والتعجيل عند ما السرعة = صفر

٢) جد الازاحه والسرعة عند ما التعجيل = صفر

٣) متى تتزايد م ؟

٤) متى تتزايد السرعة ؟ متى يتغير اتجاه الحركة .

٢) جسم يتحرك افقيا بخط مستقيم بموجب القانون م = ق (ن) = $ن^{٤} - ٦ن^{٣} + ١٢ن^{٢} - ١٠ن + ٣$

١) متى يتزايد الانطلاق ومتى يتناقص؟

٢) متى يتغير اتجاه الحركة ؟

٣) جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الثلاث ثوان الاولى من بدء الحركة .

٣) تقذف حجر شاقوليا الى الاعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (١١٢) قدم/ ثا يتحرك بموجب القانون م = $١١٢ن - ١٦ن^{٢}$ حيث م المسافة بالاقدام من نقطة الابتداء احسب :ـ

١) السرعة والتعجيل عند ما ن = ٣ ، ن = ٤

٢) اقصى ارتفاع يصله الجسم

٣) متى يكون على ارتفاع ٩٦ قدم ؟ وماهي سرعته عندما يكون على هذا الارتفاع ؟

٤) ادرس حركة كل من الاجسام التالية والتي بشكل افقي وعلى خط مستقيم والمعطاة معادلة كل منهما فيما ياتي :ـ

١) ل(ن) = $ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٣$

٢) ل(ن) = $ن^{٣} - ٥ن^{٢} + ٧ن - ٣$

٣) س(ن) = $(ن - ١)^{٢} (ن - ٤)$

٤) س(ن) = $(ن - ١)^{٤}$

٥) جسم يتحرك عموديا الى الاعلى وفي خط مستقيم بحيث ان الازاحة ل تقاس وفـــق التطبيق

ل (ن) = $ن^{٢} - ١٨ن + ٨٨١$ جد

١) مقدار الزمن الذى يمضي حتى يصل اعلى ارتفاع

٢) ما ارتفاعه عند نقطة بدء الحركة عند ئذ ؟

٦) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم وفق بيان التطبيق التالي :ـ

ل(ن) = $ن^{٣} + ٤ن - ٣ن^{٢}$ حيث م الازاحه بالامتار ، ن الزمن بالثواني جد

١) معدل السرعة خلال الثانية الخامسة

٢) السرعة والتعجيل في نهاية خمس ثوان من بدء الحركة

٧) جد السرعة الابتدائية التي يجب ان يقذف بها صاروخ راسيا الى الاعلى حتى يصل الى ارتفاع (٢٧٠٠) يارد .

(ملاحظة = استخدام القانون $\text{ل}(\text{ن}) = \text{س}_1 \text{ن} - ١٦\text{ن}^2$ حيث (س_1) ثابت

ل بالاقدام ن بالثواني) .

نظرية القيمة المتوسطة Mean Value Theorem

اذا كان ق تطبيقا مستمرا في [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق في]أ ، ب[

فانه $\exists$ على الاقل حـ $\in$]أ ، ب[ويحقق

$$\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ}) = (\text{ب} - \text{أ})\ \text{ق}'(\text{حـ})$$

مثال ١) جد قيمة حـ التي تحصل عليها بنظرية القيمة المتوسطة اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{٢} - \frac{\text{س}}{١٢} + \frac{١}{١٢}$$ ، وان أ = −٢ ، ب = ١ .

بما ان التطبيق مستمر في [−٢ ، ١] وقابل للاشتقاق في]−٢ ، ١[

$$\text{وان ق}(-٢) = ٢ + \frac{٢}{١٢} + \frac{١}{١٢} \quad ، \quad \text{ق}(١) = \frac{١}{٢} - \frac{١}{١٢} + \frac{١}{١٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{٢} - \frac{١}{١٢}$$

$$\text{ق}'(\text{حـ}) = \frac{٢\text{حـ}}{٢} - \frac{١}{١٢}$$

$$\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ}) = (\text{ب} - \text{أ})\ \text{ق}'(\text{حـ})$$

$$\frac{١}{٢} - \left(٢ + \frac{٢}{١٢} + \frac{١}{١٢}\right) = (١ + ٢)\left(\frac{٢\text{حـ}}{٢} - \frac{١}{١٢}\right) = -٣$$

$\ni$]−٢ ، ١[

مثال ٢) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لتجد قيمة تقريبية الى $\sqrt{٣٧}$

الحل) نفرض ان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ وان أ = ٣٦ ، ب = ٣٧

التطبيق ق قابل للاشتقاق في الفترة]٣٦ ، ٣٧[ومستمر في [٣٦ ، ٣٧]

لذا فانه $\exists$ عدد مثل حـ يحقق المعادلة

$$\text{ق}'(\text{حـ}) = \frac{\sqrt{٣٧} - ٦}{٣٧ - ٣٦}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{\text{حـ}}} = \frac{\sqrt{٣٧} - ٦}{١}$$

وان $٣٦ < \text{حـ} < ٣٧$

لذا $٦ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{حـ}}} = \sqrt{٣٧}$

وبما ان $\sqrt{٣٦} < \sqrt{\text{حـ}} < \sqrt{٣٧}$ لبعض حـ $\in]٣٦ ، ٣٧[$

$\Longleftrightarrow \sqrt{٣٦} < \sqrt{\text{حـ}} < \sqrt{٣٧} < \sqrt{٤٩}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{٣٦} < \sqrt{\text{حـ}} < \sqrt{٤٩}$ لان $\sqrt{٣٧} < \sqrt{٤٩}$

$\Longleftrightarrow ٦ < \sqrt{\text{حـ}} < ٧$

$\Longleftrightarrow ١٢ < ٢\sqrt{\text{حـ}} < ١٤$

$\Longleftrightarrow \frac{١}{١٢} > \frac{١}{٢\sqrt{\text{حـ}}} > \frac{١}{١٤}$

$\Longleftrightarrow ٦ + \frac{١}{١٢} > ٦ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{حـ}}} > ٦ + \frac{١}{١٤}$

$\Longleftrightarrow ٦٫٠٧١٤ < \sqrt{٣٧} < ٦٫٠٨٣٣$

ومن الممكن ان نستخدم النتيجة التالية وهي مشتقة من نظرية القيمة المتوسطة

$\text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) \cong \text{ق}(\text{أ}) + \text{هـ}\ \text{قَ}(\text{أ})$

$\text{أ} = ٣٦ ، \text{هـ} = ٣٧ - ٣٦ ، \text{قَ}(٣٦) = \frac{١}{٢\sqrt{٣٦}} = \frac{١}{١٢}$

$\text{ق}(٣٦) = \sqrt{٣٦} = ٦$

$\therefore \text{ق}(٣٦ + ١) \cong ٦ + ١ \times \frac{١}{١٢}$

$\sqrt{٣٧} \cong ٦٫٠٨٣٣$

مثال ٣) صندوق على شكل مكعب طول حرفه ٩٩٫٨ سم جد حجمه بصورة تقريبيــة .

الحل) $\text{ح} = \text{ل}^٣ ، \text{أ} = ١٠٠ ، \text{هـ} = ٩٩٫٨ - ١٠٠ = -٠٫٢$

$\text{ح} = \text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(١٠٠) = (١٠٠)^٣ = ١٠٠٠٠٠٠$

$\text{قَ}(\text{ل}) = ٣\text{ل}^٢ ، \text{قَ}(١٠٠) = ٣٠٠٠٠$

$\therefore \text{ق}(١٠٠ - ٠٫٢) \cong ١٠٠٠٠٠٠ + (-٠٫٢) \times ٣٠٠٠٠$

$\text{ق}(٩٩٫٨) \cong ٩٩٤٠٠٠\ \text{سم}^٣$

مثال ٤) جد القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{٦٣} + \sqrt[٣]{٦٣} + \sqrt[٦]{٦٣}$.

الحل) ليكن $\text{ق}: \text{ح}^{++} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt[٦]{\text{س}}$

$٦٣ = ٦٤ + (-١) = \text{أ} + \text{هـ}$

$\text{ق}(\text{أ}) = \sqrt{٦٤} + \sqrt[٣]{٦٤} + \sqrt[٦]{٦٤} = ١٤$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{\text{س}^{2}}} + \frac{1}{6\sqrt[6]{\text{س}^{5}}}$$

$$\text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^{2}}} + \frac{1}{6\sqrt[6]{(64)^{5}}}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{48} + \frac{1}{192}$$

$$= \frac{17}{192}$$

$$\therefore \text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) \cong \text{ق}(\text{أ}) + \text{هـ}\ \text{ق}'(\text{أ})$$

$$\text{ق}(63) \cong \text{ق}(64) + (-1)\ \text{ق}'(64) = 14 - \frac{17}{192}$$

ملاحظة / اذا كان ق مستمرا في [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق في] أ ، ب [فـــاذا وتغيرت س من س_1 الى س_2

فان $\text{هـ} \longrightarrow \text{س}_2 - \text{س}_1$ ويكون هو التغير في س

اما المقدار $\text{هـ}\ \text{ق}'(\text{س}_1)$ فيسمى التغير التقريبي لـ $\text{ق}(\text{س})$

ويطلق عليه ايضا الخطأ التقريبي .

مثال ٥) ليكن $\text{ق} : \text{ح} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = 8\text{س} - \text{س}^{2}$ فاذا تغيرت س من ٢ الى ٨ر١ ، جد التغير في ق(س) بصورة تقريبية

الحل) $\text{ق}'(\text{س}) = 8 - 2\text{س}$

$\therefore \text{ق}'(2) = 8 - 2 \times 2 = 4$

هـ = ٨ر١ ـ ٢ = ـ ٢ر٠

$\therefore \text{هـ}\ \text{ق}'(\text{س}_1) = \text{هـ}\ \text{ق}'(2) = $ ـ ٢ر٠ $\times\ 4 = $ ـ ٨ر٠

مقدار التغير التقريبي في $\text{ق}(\text{س}_1)$.

مثال ٦) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = 2\,\text{س}^{\frac{2}{3}}$ ناقش صحة نظرية القيمة المتوسطة اذا علمت ان
$\text{أ} = -8$ ، $\text{ب} = 1$

الحل)

$$\text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(-8) = 2\sqrt[3]{64} = 8$$

$$\text{ق}(\text{ب}) = \text{ق}(1) = 2$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{4}{3\sqrt[3]{\text{س}}} \quad , \quad \therefore \text{ق}'(\text{حـ}) = \frac{4}{3\sqrt[3]{\text{حـ}}}$$

ق (ب) ـ ق (أ) = (ب ـ أ) قَ (حـ)

٢ ـ ٨ = (٨ + ١) × $\frac{٤}{٣ \sqrt[٣]{حـ}}$

$\sqrt[٣]{حـ}$ = ـ ١

∴ حـ = ـ ٨ ∉ [ـ ٨ ، ١]

∴ لاتتحقق نظرية القيمة المتوسطة والسبب في ذلك ان التطبيق غير قابل للاشتقاق عند الصفر ∈] ـ ٨ ، ١ [

مثال ٧) يراد طلاء صندوق مغلق على شكل مكعب طول حرفه ١ م بطلاء سمكه ١ ملم . جد كمية الطلاء بصورة تقريبيـــة .

الحل)

ان الطلاء سيسبب زيادة في الحجم نتيجة للزيادة في طول حرف المكعب .. فاذا كان طول حرف المكعب الاصلي = ١٠٠ سم

فان طوله الجديد = ١٠٠,٢ سم اى ان هـ = ١٠٠,٢ ـ ١٠٠ = ٠,٢ سم

ق(ل) = ح = ل ٣ ، قَ (ل) = ٣ل ٢ ، قَ (١٠٠) = ٣٠٠٠٠

التغير في الحجم = هـ قَ (ل) = ٠,٢ × ٣٠٠٠٠ = ٦٠٠٠ سم ٣ = ٦ لتر

مثال ٨) دائرة نصف قطرها ١٤ سم . فاذا كان هناك احتمال خطأ في قيـــــاس محيطها = ٠,٤ ط سم فما هو احتمال الخطا في قياس مساحتها .

الحل)

محيط الدائرة = ٢نق ط

ل (نق) = ٢ نق ط

لَ (نق) = ٢ ط

الخطا في قياس المحيط = ± هـ لَ (نق)

٠,٤ ط = ± هـ × ٢ ط

∴ هـ = ± ٠,٢ سم الخطأ في قياس نصف القطر

المساحة = نق٢ ط اى ع (نق) = نق٢ ط ، ∴ عَ (نق) = ٢نق ط

عَ (١٤) = ٢٨ ط

اى ان الخطا في قياس المساحة = هـ عَ (نق) = ∓ ٠,٢ × ٢٨ ط

= ± ٥,٦ ط سم ٢

تماريـــــن

في كل مما يلي (من تمرين ١ الى ٧) جد جميع الاعداد حـ بين أ و ب والتي تحقق نظرية القيمة المتوسطة ٠ وان كانت نظرية القيمة المتوسطة لاتتحقـــق فاذكر سبب عدم امكانية تطبيقها ٠

١) $ق(س) = س^{٢} - ٢س - ٢$ ، $أ = ٠$ ، $ب = ٢$

٢) $ق(س) = س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤س - ٢$ ، $أ = ١$ ، $ب = ٣$

٣) $ق(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ ، $أ = صفر$ ، $ب = ١$

٤) $ق(س) = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، $أ = -٣$ ، $ب = ٤$

٥) $ق(س) = \frac{٢س + ٢}{٣س + ٢}$ حيث $س \neq \frac{-٢}{٣}$ ، $أ = -١$ ، $ب = صفر$

٦) $ق(س) = \sqrt[٥]{س^{٩} - س^{٤}}$ ، $أ = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = \frac{١}{٢}$

٧) $ق(س) = \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$ ، $س \neq ١$ ، $أ = -١$ ، $ب = ٢$

٨) اذا كان ق تطبيق كثير الحدود من الدرجة الثانية وكان أ ، ب اى عددين حقيقيين في منطلق ق ٠ فاثبت ان $حـ = \frac{أ + ب}{٢}$ هي التي تحقق نظريـــة القيمة المتوسطـــة ٠

(تلميـــح / افرض ان $ق(س) = د س^{٢} + هـ س + و$ ، $د \neq صفر$ وان كلا من د ، هـ ، و ثوابت)

٩) اذا كان $ق(س) = س^{٧} - ٢س^{\frac{٤}{٣}} + ٣$ ٠ جد بصورة تقريبية $ق(١٫٠٠١)$

١٠) جد بصورة تقريبية كلا مما يلي :-

$(١٧)^{-\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt{(٠٫٩٨)^{-١}}$ ، $(١٫٠٨)^{\frac{٤}{٣}} + (١٫٠٨)^{-٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt[٣]{١٫٠٨}}$ ،

$\sqrt{(٠٫٠٠٩٩)^{-١}}$ ، $\sqrt[٥]{(٣١)^{-١}}$ ، $\sqrt{٨٢} + \sqrt[٤]{٨٢}$ ، $\sqrt{١٠} + \sqrt[٣]{١٠}$

التطبيقات العددية المتزايدة المتناقصة

نحن نعلم انه اذا كان ميل المماس موجبا فانه يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول .

اى انه عندما قَ (س) > صفر فان المنحني يتزايد كلما اتجهنا من اليسار الى اليمين .

اما اذا كان ميل المماس سالبا فان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب للمحور الاول او اى مستقيم يوازى المحور الاول . وبذلك عندما يكون قَ (س) < صفر فان المنحني يتناقص كلما اتجهنا من اليسار الى اليمين .

اما اذا كان الميل = صفر فانه يعني ان المماس يوازى المحور الاول والنظرية التالية توضح امكانية استخدام اشارة المشتقة فيما اذا كان التطبيق متزايد او متناقص بفترات معينة .

نظريـــة

ليكن ق تطبيق مستمر في [أ ، ب] وكان ق قابلا للاشتقاق في]أ ، ب[فان :

١) ق متزايد في]أ ، ب[$\Longleftrightarrow$ قَ (س) > صفر ∀ س ∈] أ ، ب [

٢) ق متناقص في]أ ، ب[$\Longleftrightarrow$ قَ (س) < صفر ∀ س ∈] أ ، ب [

تعريف

ليكن ق ∈ تط (ك) ، ∀ $س_1$ ∈ ك

١) اذا كان قَ ($س_1$) = صفرا فان ($س_1$ ، ق ($س_1$)) نقطة حرجـــة

٢) اذا كان ق غير قابل للاشتقاق عند $س_1$ فان ($س_1$ ، ق ($س_1$)) نقطة حرجة

تعريف

ليكن ق تطبيقا مستمرا في [أ ، ب]

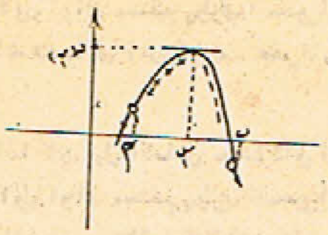
١) للتطبيق ق اعظم قيمة محلية عند النقطة ن اذا وجد]حـ ، ك[⊂ [أ ، ب] وان]حـ ، ك[تحتوى اعظم قيمة فان ق (ن) = اعظم قيمة محلية .

٢) للتطبيق اوطأ قيمة محليا عند النقطة و اذا وجد]ى ، ل[⊂ [أ ، ب] وان]ى ، ل[تحتوى اوطأ قيمة فان ق (و) اصغر قيمة محليا .

نظريـــة

اذا كان ق تطبيقا عدديا قابلا للاشتقاق في]أ ، ب[وكان للتطبيق اصغـــر قيمة محليا او اكبر قيمة محليا عند ن فان $\bar{ق}$ (ن) = صفر

نظرية



ليكن ق تطبيقا مستمرا

وليكن $س_1$ ∋ منطلق ق

ولتكن]أ ، ب[بحيث ان

$س_1$ ∋]أ ، ب[قابلا للاشتقاق فيها

١) فاذا كان $\bar{ق}$ (س) > صفر ∀ س ∋] $س_1$ ، ب [و $\bar{ق}$(س) < صفر ∀ س ∋]أ ، $س_1$[و $\bar{ق}$ $(س_1)$ = صفر فان ق $(س_1)$ = اعظـــم قيمة محليا لـ ق .

٢) واذا كان $\bar{ق}$ (س) < صفر ∀ س ∋] $س_1$ ، ب[و $\bar{ق}$ (س) > صفر ∀ س ∋]أ ، $س_1$[و $\bar{ق}$ $(س_1)$ = صفر فان ق $(س_1)$ = اوطأ قيمة محليا لـ ق .

كيفية ايجاد اعظم قيمة واصغر قيمة للتطبيق

ليكن ق تطبيقا مستمرا في [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق فـي] أ ، ب [فيمكـــن ايجاد اعظم قيمة واوطأ قيمة محليـــة للتطبيق ق كما يلي :—

١) نجد $\bar{ق}$ (س)

٢) نجد النقاط الحرجة ولتكن احداثياتها السينية $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ...

٣) ناخذ القيم التي ∋ [أ ، ب] فقط ولتكن على سبيل المثال $س_1$ ، $س_3$

٤) نجد ق (أ) ، ق (ب) ، ق $(س_1)$ ، ق $(س_3)$ فايهما اكبر هــو اعظم قيمة وايهما اصغر هو اصغر قيمة في الفترة [أ ، ب].

امثلـــــــــة

في الامثلة التاليــة جد مناطــق التزايــد والتناقص ان امكـــن وجد النقـــاط الحرجة ... ثم جد ان امكن اعظم واوطأ قيمــة محليا .

١) ق (س) = ٨ ــ ٣س

ق̄ (س) = ــ ٣ < صفر ∀ س ∋ ح

∴ ق متناقص ∀ س ∋ ح

∴ لاتوجد نقاط حرجة

∴ لاتوجد اعظم ولاتوجد اصغر قيمة محليـــة

٢) ق(س) = س٢ ــ ٦س + ٤

ق̄ (س) = ٢س ــ ٦ ق̄(س) ++++ | ٣ ــــــــ اشارة ٢(س ــ ٣)

↗متزايد ↘متناقص

∴ ق متزايد في { س : س ∋ ح ، س > ٣ }

ق متناقص في { س : س ∋ ح ، س < ٣ }

(٣ ، ق (٣)) = (٣ ، ــ ٥) نقطة حرجة

ق (٣) = ــ ٥ اصغر قيمة محلية لـ ق

٣) ق (س) = س٣ ــ ٩ س٢ + ٢٧س ــ ٤

ق̄ (س) = ٣س٢ ــ ١٨ س + ٢٧

= ٣(س٢ ــ ٦س + ٩)

= ٣(س ــ ٣)^{٢} ≥ صفر ∀ س ∋ ح

∴ ق متزايد ∀ س ∋ ح / {٣} ،

∴ لاتوجد اعظم قيمةمحليةولاتوجد اصغر قيمة محلية للتطبيق

وبجعل ق̄ (س) = ٠ نحصل على س = ٣

∴ (٣ ، ق (٣)) نقطة حرجــة

٤) ليكن ق : ح / {ــ ٢} ⟵ ح بحيث ق (س) = $\frac{\text{٣ ــ س}}{\text{٢ + س}}$

ق̄ (س) = $\frac{\text{(٢ + س) (ــ١) ــ (٣ ــ س) × ١}}{\text{(٢ + س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{ــ٥}}{\text{(٢ + س)}^{٢}}$ < صفر

∀ س ∋ ح / { ــ ٢ }

∴ ق متناقص في ح / { ــ ٢ }

∴ لاتوجد نقاط حرجة لان ق̄ (س) ≠ صفر ∀س ∋ ح / { ــ ٢ }

وانه قابل للاشتقاق ∀ س ∋ ح / { ــ ٢ }

∴ لاتوجد اعظم قيمة محلية ولاتوجد اصغر قيمة محلية

٥) ليكن ق : [ــ ٣ ، ٣] ⟵ ح بحيث ق(س) = $\sqrt{\text{٩ ــ س}^{٢}}$

قَ (س) = (— ٢س) / (٢ √(٩ — س٢)) = (— س) / √(٩ — س٢)

قَ (س) > صفر ∀ س ∋] —٣ ، ٠ [

قَ (س) < صفر ∀ س ∋] ٠ ، ٣ [

∴ ق متزايد في] — ٣ ، ٠ [

و ق متناقص في] ٠ ، ٣ [

قَ (صفر) = صفر

∴ (٠ ، ٣) نقطة حرجة

ق (٠) = ٣ اعظم قيمة محلية

	٣	صفر	—٣
اشارة — س	— — — — —	+ + + +	
اشارة √(٩ — س٢)	+ + + + + + +	+ + + +	
اشارة قَ (س)	— — — — — —	+ + + + +	
	متناقص	متزايد	

٦) ق (س) = ∛س

قَ (س) = ١ / (٣ ∛(س٢)) > صفر ∀ س ∋ ح / { ٠ }

∴ ق متزايد ∀ س ∋ ح / { ٠ }

∴ لايمتلك اعظم قيمة ولايمتلك اصغر قيمة محلية

ق غير قابل للاشتقاق عند الصفر

∴ (٠ ، ٠) نقطة حرجـــة

٧) ق (س) = ٢٧س — س٣

قَ (س) = ٢٧ — ٣س٢ = ٣(٩ — س٢) = ٣(٣ — س) (٣ + س)

∴ ق متزايد في] —٣ ، ٣ [

ومتناقص في ح / [—٣ ، ٣]

اعظم قيمة محلية = ق(٣) = ٥٤

اصغر قيمة محلية = ق(—٣) = —٥٤

النقاط الحرجة

(٣ ، ٥٤) ، (—٣ ، —٥٤)

	٣	—٣	
اشارة ٣—س	— — —	+ + + +	+ + +
اشارة ٣ + س	+ + +	+ + + +	— — — — —
اشارة قَ(س)	— —	+ + + +	— — —
	متناقص	متزايد	متناقص

٨) ق : ح / { ٠ } ⟵ ح بحيث ق (س) = ٢س + ١٨ / س

قَ(س) = ٢ — ١٨ / س٢ = (٢س٢ — ١٨) / س٢ = ٢(س٢ — ٩) / س٢ = ٢(س — ٣) (س + ٣) / س٢

ق متناقص في] —٣ ، ٣ [/ { ٠ }

ق متزايد في ح / [—٣ ، ٣]

ق (٣) = ١٢ اوطا قيمة محليا

ق(—٣) = —١٢ اعظم قيمة محليا

النقاط الحرجة (٣ ، ١٢) ،

(— ٣ ، —١٢)

	٣	صفر	—٣	
اشارة س — ٣	+ + +	— — —	— —	— — —
اشارة س + ٣	+ + +	+ + + + +	+ + +	— — — —
اشارة س٢	+ + +	+ + + +	+ + + +	+ + +
اشارة قَ (س)	+ + +	— — —	— — —	+ + +
	متزايد	متناقص	متناقص	متزايد

٩) ق : ح / [−٣ ، ٣] ⟵ ح بحيث ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٩}$

قَ(س) = $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ٩}}$

	٣		−٣
اشارة س	+ + + + + +		− − − − −
اشارة $\sqrt{س^{٢} - ٩}$	+ + + +	∄ غير معرفة	+ + + +
اشارة قَ(س)	+ + +		− − − −
	متزايد		متناقص

ق متزايد ∀ س > ٣

ق متناقص ∀ س < −٣

لاتوجد نقاط حرجة

لاتوجد اعظم قيمة محلية

ولاتوجد اصغر قيمة محلية للتطبيق

١٠) ق (س) = $\frac{٢}{س^{٢} + ١}$ ، قَ (س) = $\frac{-٤س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

		صفر	
اشارة −٤س	− − − −		، + + + +
اشارة $(س^{٢} + ١)^{٢}$	+ + +		+ + + + + . +
اشارة قَ(س)	− − − −		+ + . +
	متناقص		متزايد

ق متزايد ∀ س < صفر

ومتناقص ∀ س > صفر

ق(٠) = اعظم قيمة محلية

(٠ ، ق(٠)) نقطة حرجة

١١) ليكن ق (س) = $س^{٤} - ٨ س^{٢}$

جد اعظم واصغر قيمة للتطبيق ق في الفترات التالية [−٣ ، ٣] ، [−١ ، ١] ، [٣ ، ٤]

الحل قَ (س) = $٤س^{٣} - ١٦س$

= ٤س ($س^{٢}$ − ٤) = ٤ . س (س − ٢) (س + ٢)

عندما قَ (س) = ٠ فان س = ٠ اوس = ٢ اوس = −٢

١) في [−٣ ، ٣] . كل من صفر ، −٢ ، ٢ ∈ [−٣ ، ٣]

وان ق (−٣) = ٩ ، ق (٣) = ٩ ، ق(٢) = −١٦ ، ق(−٢) = −١٦ ، ق (٠) = ٠

∴ اعظم قيمة = ٩ ، اصغر قيمة = −١٦

٢) في [−١ ، ١]

صفر ∈ [−١ ، ١]

∴ ق (−١) = −٧ ، ق (١) = −٧ ، ق (٠) = صفر

∴ صفر اعظم قيمة و −٧ اصغر قيمة للتطبيق ق في [−١ ، ١]

٣) في [٣ ، ٤] ايا من −٢ ، ٠ ، ٢ ∉ [٣ ، ٤]

ق (٣) = ٩ ، اوطا قيمة

ق (٤) = ١٢٨ اعظم قيمة

١٢) اذا كان ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق(س) = أس + $\frac{ب}{س}$ حيث أ ، ب ∈ ح واذا كانت ($\frac{٥}{٢}$ ، ٢) نقطة حرجة فما قيمة كل من الثابتين

اى ق(س) = { س² + ٢س + ٤ ∀ س ≠ ٢
١٢ عندما س = ٢

∀ ⟨س_ن⟩ متتابعة علىح متقاربة وغايتها = ٢ فان

ق(س_ن) = ⟨(س_ن)² + ٢س_ن + ٤⟩ = غا ⟨س_ن⟩ غا ⟨س_ن⟩ + ٢غا ⟨س_ن⟩

+ غا ⟨٤⟩

= ٢ × ٢ + ٢ × ٢ + ٤ = ١٢

وبما ان ق(٢) = ١٢

∴ غا ⟨ق(س_ن)⟩ = ق(٢)

∴ ق مستمر عند ٢

٤) ليكن ق ∋ تط (ح) بحيث ق(س) = { (س² + ٣س − ١٠) / (س − ٢) اذا كان س ≠ ٢
أ اذا كان س = ٢

حيث أ ∋ ح ، جد قيمة أ التي تجعل ق مستمرا عند س = ٢

الحل/ يمكن كتابة التطبيق كما يلي :-

ق(س) = { (س + ٥)(س − ٢) / (س − ٢) اذا كان س ≠ ٢
أ اذا كان س = ٢

اى ان ق(س) = { س + ٥ اذا كان س ≠ ٢
أ اذا كان س = ٢

ولكي يكون ق مستمرا عند س = ٢ فانه ∀ ⟨س_ن⟩ متتابعة علىح متقاربة

وغايتها = ٢ فان غا ⟨ق(س_ن)⟩ = غا ⟨س_ن + ٥⟩ = غا ⟨س_ن⟩

+ غا ⟨٥⟩

= ٢ + ٥ = ٧ = ق(٢) = أ ⟸ أ = ٧

٥) ليكن ق ∋ تط (ح) بحيث

ق(س) = { (س ١ + √س²) / √س² س ≠ صفر
٣ عندما س = صفر

(١) ارسم ق في المستوى الاقليدى

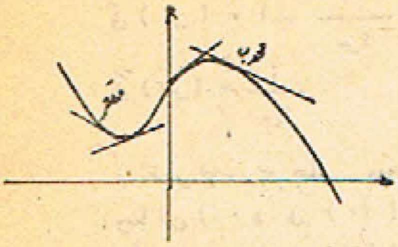
(٢) هل يكون ق مستمرا عند الصفر ؟ برهن قولك

الحل/ قبل ان نبدا بحل هذا التمرين لنعرف √س²

تعريف / √س² = { س اذا كان س ≥ صفر
−س اذا كان س < صفر

التطبيقات العددية المحدبة والمقعـرة

يقال لتطبيق عددي انه مقعر (في فترة ما) اذا كان واقعا فوق مماساته ومحدب اذا كان واقعا تحتها



وتسمى النقطة التي يلتقي بها التقعر بالتحدب او التحدب بالتقعر بنقطة الانقلاب

ولمعرفة المناطق التي يكون فيهـا منحنى التطبيق مقعرا او محدبا تجيبنا النظرية التاليـة :ـ

<u>نظرية</u>

ليكن ق ∋ تط (ك) ولتكن]أ ، ب[⊃ ك وان ق قابل للاشتقـاق في]أ ، ب[فعندئذ

١) ق محدب في]أ ، ب[⟺ ق̈ (س) < صفر ∀ س ∋]أ ، ب[

٢) ق مقعرا في]أ ، ب[⟺ ق̈ (س) > صفر ، ∀ س ∋]أ ، ب[

٣) اذا كان حـ ∋]أ ، ب[و (حـ ، ق (حـ)) نقطة انقلاب فان ق̈ (حـ) = صفر او ق̇ غير قابل للاشتقاق في حـ

نظرية/

ليكن ق ، ق̇ تطبيقا قابلا للاشتقاق في]أ ، ب[والتي تحتوي على حـ وان ق̇ (حـ) = صفر فعندئذ

١) اذا كانت ق̈ (حـ) < صفر فان ق (حـ) هي اعظم قيمة الى ق

٢) اذا كانت ق̈ (حـ) > صفر فان ق (حـ) هي اصغر قيمة الى ق

امثلــــة

في الامثلة التالية جد مناطق التحدب والتقعر ونقاط الانقلاب ان وجدت :ـ

١) ق (س) = ٤ س^{٣} ـ س^{٤} ـ ٦ س^{٢} ـ ٤

ق̇ (س) = ١٢ س^{٢} ـ ٤ س^{٣} ـ ١٢ س

ق̈ (س) = ٢٤ س ـ ١٢ س^{٢} ـ ١٢

= ـ ١٢ (س^{٢} ـ ٢ س + ١)

= ـ ١٢ (س ـ ١)^{٢}

وبما ان ق̈ (س) < صفر ∀ س ∋ ح / {١}

∴ ق محدب ∀ س ∋ ح / {١}

قً(١) = صفر ولكن (١ ، ـ٧) ليست نقطة انقلاب لان المنحني محدب قبلها وبعدها

٢) ليكن ق : ح / {٠} ⟵ ح بحيث ق(س) = س + $\frac{١}{س}$

قَ(س) = ١ ـ $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{س^٢ ـ ١}{س^٢}$

قً(س) = $\frac{٢}{س^٣}$

اشارة قً(س) ‎ ------ صفر +++++

مقعر | محدب

ق مقعر ∀ س > صفر ومحدب ∀ س < صفر

وبما ان (٠ ، ق (٠)) ∉ ق

∴ ليس للتطبيق نقطة انقلاب

٣) ليكن ق(س) = ٤٠س^٣ ـ ٣س^٥ + ١٠س ـ ٨

قَ(س) = ١٢٠س^٢ ـ ١٥س^٤ + ١٠

قً(س) = ٢٤٠س ـ ٦٠س^٣

= ٦٠س (٤ ـ س^٢)

= ٦٠س (٢ ـ س) (٢ + س)

	٢	صفر	ـ٢	
اشارة ٦٠س	++	+++	---	--
اشارة ٢ ـ س	ـ	+++	++++	++
اشارة ٢+س	++	++	+++	--
اشارة قً(س)		+++	---	+++

∴ ق محدب في]ـ٢ ، ٠[∪ {س : س ∈ ح ، س > ٢}

ق مقعر في]٠ ، ٢[∪ {س : س ∈ ح ، س < ـ٢}

نقاط الانقلاب (٠ ، ق (٠)) ، (٢ ، ق (٢)) ، (ـ٢ ، ق (ـ٢))

٤) ليكن ق : ح / {٢} ⟵ ح بحيث ق(س) = $\frac{ـ٣}{س ـ ٢}$ ،

قَ(س) = $\frac{٣}{(س ـ ٢)^٢}$ ، قً(س) = $\frac{ـ٦}{(س ـ ٢)^٣}$

	٢	
اشارة البسط	----	------
اشارة $(س ـ ٢)^٣$	++++++	-------
اشارة ق (س)	----	+++++++

ق محدب ∀ س > ٢

ومقعر ∀ س < ٢

وبما ان ٢ ∉ المنطلق

∴ لاتوجد نقطة انقلاب

٥) جد اعظم واوطأ قيمة محلية للتطبيق ق (س) = س^٤ ـ ٨س^٢ + ٧

قَ(س) = ٤س^٣ ـ ١٦س

قً(س) = ١٢س^٢ ـ ١٦

عندما قَ(س) = ٠ فان ٤س (س ـ ٢) (س + ٢) = صفر

∴ س = ٠ ، س = ٢ ، س = ـ٢

ق (صفر) = $-16 <$ صفر ∴ ق(٠) اعظم قيمة محلية

ق (٢) = $32 >$ صفر ∴ ق (٢) اصغر قيمة محلية

ق (-2) = $32 >$ صفر ∴ ق (-2) اصغر قيمة محلية

تمارين

جد المناطق التي يكون فيها كل من التطبيقات (من تمرين ١ الى ١٨) متزايدا او متناقصا ثم جد اعظم قيمة محلية او اصغر قيمة محلية للتطبيق ان وجدت .

١) $\text{ص} = 1 - 4\text{س} - \text{س}^2$

٢) $\text{ل}(\text{س}) = (\text{س} - 2)^2$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} + 4)^3$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3(\text{س} - 3)$

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س} - 2}$ ، $\text{س} \neq 2$

٦) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{1}{(\text{س} - 1)^2}$ ، $\text{س} \neq 1$

٧) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 - 6\text{س} - 16}$ ، $\text{س} \neq -2 ، 8$

٨) $\text{ص} = (\text{س} - 3)\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} \geq$ صفر

٩) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{3} - \sqrt[3]{\text{س}}$

١٠) $\text{ص} = \text{س}^2(\text{س} - 12)^2$

١١) $\text{ص} = \text{س}(\text{س} - 1)^2(\text{س} - 2)$

١٢) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^3}{\text{س}^2 + 3}$

١٣) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س} + 2}{\text{س} - 1}$ ، $\text{س} \neq 1$

١٤) $\text{ص} = \dfrac{(\text{س} - 2)(8 - \text{س})}{\text{س}^2}$ ، $\text{س} \neq 0$

١٥) $\text{ص} = \dfrac{16}{\text{س}(4 - \text{س}^2)}$ ، $\forall \text{س} \in \text{ح} / \{2 ، -2 ، 0\}$

١٦) $\text{ص} = \dfrac{4}{\sqrt{\text{س}^2 + 8}}$

١٧) $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}^2 - 4}}$ ، $\forall \text{س} \in \text{ح} / \{2 ، -2\}$

١٨) $ص = \sqrt[٣]{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

في الاسئلة (من تمرين ١٩ الى ٢٢) جد اعظم واوطأ قيمة لكل تطبيق في الفترة المبينة ازاء كل منها اما اذا لم تذكر الفترة نجد ها ضمن اكبر منطلق له .

١٩) $ق(س) = \frac{س}{١ + س^{٢}}$

٢٠) $ق(س) = \sqrt{س(١٠ - س)}$

٢١) $ق(س) = س^{٢}$ في $[-١ ، ٣]$

٢٢) $ق(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ١$

(١) في $[-١ ، ٥]$

(٢) في $[-١٠ ، ١٢]$

في الاسئلة (من تمرين ٢٣ الى ٢٨) جد الفترات التي يكون فيها التطبيق محدبا او مقعرا .

٢٣) $ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٢س + ٤$

٢٤) $ق(س) = (س + ١)^{٤}$

٢٥) $ق(س) = \frac{١}{س + ٣}$ ، $س \neq -٣$

٢٦) $ق(س) = \frac{س^{٣}}{س^{٢} + ١٢}$

٢٧) $ق(س) = \sqrt[٣]{٤س^{٣} - ١٢س}$

٢٨) $ق(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$

تطبيقات على اعظم قيمة واوطأ قيمة محلية

كثير من الاسئلة تحل بفكرة اعظم قيمة واوطأ قيمة محلية للتطبيق وطريقة الحل نلخصها كما يلي :-

١) كوّن التطبيق المراد ايجاد اعظم أو أوطأ قيمة محلية له على ان يكون في متغير واحد .

٢) اذا لم يكن التطبيق في متغير واحد فاستخدم شروط المسالة لتحويله الى تطبيق في متغير واحد .

٣) اشتق التطبيق بالنسبة لمتغيره المستقل ثم جد اعظم قيمة محلية او اصغر قيمة محلية كما مر سابقا .

امثلــــة محلولــــة

١) اثبت صحة المتراجحة $\text{س} + \frac{1}{\text{س}} \geqslant 2 \quad \forall\, \text{س} > \text{صفر}$

الحل) ليكن $\text{ق} : \text{ح}^{++} \longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{1}{\text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 1 - \frac{1}{\text{س}^2}$

لتكن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر} \Longleftarrow \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2} = 0 \Longleftarrow \text{س}^2 - 1 = 0$

$\Longleftarrow \text{س} = \pm 1$

وبما ان $-1 \notin \text{ح}^{++}$ $\therefore \text{س} = 1$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}^3}$ $\therefore \text{ق}''(\text{س}) > \text{صفر} ، \forall \text{س} > \text{صفر}$

$\therefore$ ق مقعر $\forall \text{س} > \text{صفر}$

$\therefore \text{ق}(1) = 2$ اصغر قيمة محلية للتطبيق

$\therefore \text{س} + \frac{1}{\text{س}} \geqslant 2$

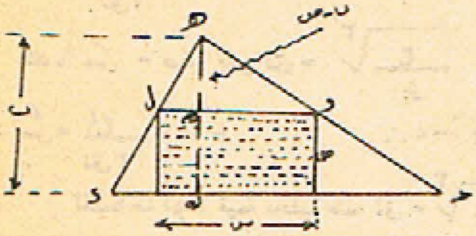
٢) مثلث طول قاعدته أ سم وارتفاعه ب سم ، رسم داخله مستطيل راسان متجاوران من رؤوسه يقعان على القاعدة .

جد اكبر مساحة لهذا المستطيل .

$\triangle\triangle$ هـ و ل ، هـ حـ د المتشابهان

وفيهما

$\frac{\text{ول}}{\text{حد}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{هـ ك}}$



$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب} - \text{ص}}{\text{ب}}$

$\text{س} = \frac{\text{أ}(\text{ب} - \text{ص})}{\text{ب}}$ ......(١)

م س = الطول × العرض = س ص ...(٢)

بالتعويض من (١) في (٢) ينتج :.

$\text{م س} = \frac{\text{أ}(\text{ب} - \text{ص})}{\text{ب}} \times \text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}(\text{ب ص} - \text{ص}^2)$

$\text{ق} :]\,0 ، \text{ب}\,[\longrightarrow \text{ح}$ بحيث $\text{ق}(\text{ص}) = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}(\text{ب ص} - \text{ص}^2)$

$\text{ق}'(\text{ص}) = \text{صفر}$ فان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}(\text{ب} - 2\text{ص}) = \text{صفر}$

$\therefore \text{ص} = \frac{\text{ب}}{2}$

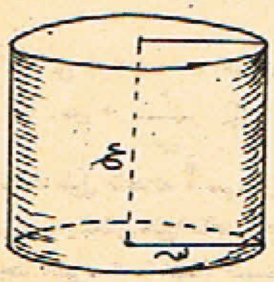
$\text{ق}''(\text{ص}) = \frac{-٢\text{أ}}{\text{ب}} < \text{صفر} \quad ، \ \forall \ \text{ص} \in \,]٠ ، \text{ب}[$

∴ المساحة أكبر ما يمكن عندما ص $= \frac{\text{ب}}{٢}$

$∴ \text{ق}\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right) = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\left(\text{ب} \times \frac{\text{ب}}{٢} - \frac{\text{ب}^٢}{٤}\right) = \frac{\text{أب}}{٤} \ \text{سم}^٢$

مثال ٣) يراد صنع علبة اسطوانية مفتوحة سعتها (ح) سم ٣ من معدن رقيق برهــــن انه يجب ان يكون نق = ع لكي يكفي لصنعها اقل كمية ممكنة من المعدن .

الحل)



$\text{ح} = \text{نق}^٢ \, \text{ط} \, \text{ع}$

$\text{ع} = \frac{\text{ح}}{\text{نق}^٢ \, \text{ط}}$

س = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= ٢\text{نق ط ع} + \text{نق}^٢ \, \text{ط}$

$\text{س} = ٢\text{نق ط} \times \frac{\text{ح}}{\text{نق}^٢ \, \text{ط}} + \text{نق}^٢ \, \text{ط}$

$\text{س} = \frac{٢\text{ح}}{\text{نق}} + \text{نق}^٢ \, \text{ط}$

$\text{س}' = \frac{-٢\text{ح}}{\text{نق}^٢} + ٢\text{نق ط}$

عندما $\text{س}' = \text{صفر}$ فان $\text{نق} = \sqrt[٣]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}$

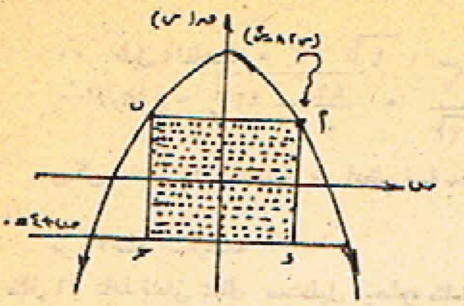
$\text{س}'' = \frac{٤\text{ح}}{\text{نق}^٣} + ٢\text{ط}$ $\qquad ∴ \text{س}''\left(\sqrt[٣]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}\right) = \frac{٤\text{ح}}{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}} + \text{ط} > \text{صفر}$

∴ للمساحة اوطا قيمة محلية عند $\text{نق} = \sqrt[٣]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}$

$∴ \text{ع} = \frac{\text{ح}}{\text{نق}^٢ \, \text{ط}} = \frac{\text{ح}}{\left(\sqrt[٣]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}}\right)^٢ \text{ط}} = \sqrt[٣]{\frac{\text{ح}}{\text{ط}}} = \text{نق}$

مثال ٤) آ ب حـ د مستطيل راسين متجاورين من رؤوسه يقعان على بيان التطبيـــــق ق (س) = ٨ ــ س٢ والراسان الاخران يقعان على المستقيم ص + ٤ = صفر .

جد اكبر مساحة ممكنة لهذا المستطيل .



لتكن أ(س ، ٨ ــ $س^2$)

∴ طول و د = س

وبما ان التطبيق ق متناظر مع المحور الثاني

∴ طول قاعدة المستطيل = ٢س

وبما ان احداثيي د هي (س ، –٤)

لانها تقع على المستقيم ص + ٤ = ٠

∴ طول أد = |٨ ــ $س^2$ ــ (–٤)| = |١٢ ــ $س^2$| = ١٢ ــ $س^2$

∴ م = ٢س (١٢ ــ $س^2$) = ٢٤س ــ $٢س^3$

∴ $م'$ = ٢٤ ــ $٦س^2$

عندما $م'$ = صفر فان $س^2$ = ٤ ومنها س = ٢

$م''$ = ــ١٢ س

$م''$(٢) = ــ١٢ × ٢ > صفر

∴ التطبيق اعظم قيمة محلية

عند س = ٢

∴ م(٢) = ٢٤ × ٢ ــ ٢ × ٢^3 = ٣٢ وحدة مربعة •

مثال ٥) جد ابعاد اكبر مستطيل يمكن وضعه داخل نصف كرة نصف قطرها ٧ سم بحيث ان راسين متجاورين من رؤوسه يقعان على قطرها •

الحل)



نفرض طول قاعدة المستطيل = ٢س سم

نفرض ارتفاع المستطيل = ص سم

∴ مساحته = ٢س ص

لكن $س^2$ + $ص^2$ = ٤٩ ... (فيثاغورس)

∴ ص = $\sqrt{٤٩ ــ س^2}$

∴ م = ٢س $\sqrt{٤٩ ــ س^2}$

∴ ق :] ٠ ، ٧ [⟵ ح بحيث ق(س) = ٢س $\sqrt{٤٩ ــ س^2}$

اى ق (س) = ٢ $\sqrt{٤٩س^2 ــ س^4}$

$$ق'(س) = \frac{٩٨س ــ ٤س^3}{\sqrt{٤٩س^2 ــ س^4}}$$

عندما $ق'$(س) = صفر فان ٢س(٤٩ ــ $٢س^2$) = ٠

س ≠ صفر

∴ ٤٩ = $٢س^2$

∴ س = $\frac{٧}{\sqrt{٢}}$ سم

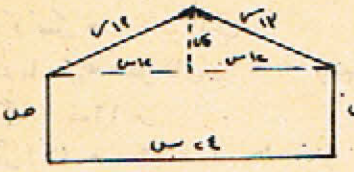
∴ طول القاعدة = $٧\sqrt{٢}$

∴ الارتفاع = $\sqrt{٤٩ - \frac{٤٩}{٢}} = \frac{٧}{\sqrt{٢}} = \frac{٧\sqrt{٢}}{٢}$ سم

ويمكن اختبار ان للتطبيق ق اعظم قيمة محلية اى اعظم مساحة عند $\frac{٧}{٢}$ كما مر بالامثلة السابقة .

مثال ٦) نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوى الساقين ارتفاعه $\frac{٥}{٢٤}$ طول قاعدته فاذا كان محيط النافذة = ١٢ مترا جد مساحته بحيث تسمح بمرور اكبر كمية ممكنة من الضوء .

الحل)



نفرض طول القاعدة = ٢٤ س متر

∴ ارتفاع المثلث = $\frac{٥}{٢٤} \times ٢٤$ س

= ٥ س متر

وبتطبيق نظرية فيثاغورس نجد طول الوتر أب = أحـ = ١٣ س متر

نفرض ارتفاع المستطيل = ص متر

∴ المحيط = ١٣ س + ١٣ س + ٢ص + ٢٤ س

١٢ = ٥٠ س + ٢ص

٦ = ٢٥ س + ص

∴ ص = ٦ ـ ٢٥ س

∴ م = ٢٤ س ص + ½ (٢٤ س) (٥ س)

= ١٤٤ س ـ ٦٠٠ س^٢ + ٦٠ س^٢

= ١٤٤ س ـ ٥٤٠ س^٢

∴ ق :] ٠ ، $\frac{٤}{١٥}$ [⟵ ح بحيث ق(س) = ١٤٤ س ـ ٥٤٠ س^٢

∴ ق$'$(س) = ١٤٤ ـ ١٠٨٠ س

عندما ق$'$(س) = صفر فان س = $\frac{١٤٤}{١٠٨٠} = \frac{٢}{١٥}$ سم

ق$''$(س) = ـ ١٠٨٠ < صفر

اى ق$''$($\frac{٢}{١٥}$) < صفر

∴ للمساحة اعظم قيمة محلية عند $\frac{٢}{١٥}$

$ق\left(\frac{٢}{١٥}\right) = ١٤٤ \times \frac{٢}{١٥} - ٥٤ \times \frac{٤}{٢٢٥}$ سم^{٢}

المساحة التي تسمح بمرور اكبر كمية ممكنة من الضوء .

مثال ٧) قطعة سلك تصلح لتكون دائرة نصف قطرها ١٢ سم قطعت الى قطعتين بحيث حولت كل قطعة الى دائرة . جد طول كل قطعة عندما تكون مجموع مساحتي الدائرتين اقل مايمكن .

الحل) ـ

طول القطعة = محيط الدائرة = ٢نق ط = ٢ × ١٢ ط = ٢٤ ط سم

نفرض نصف قطر الدائرة الاولى = س

∴ محيط الاولى = ٢س ط

نفرض نصف قطر الدائرة الثانية = ص

∴ محيط الثانية = ٢ص ط

لكن محيط الدائرة الاولى + محيط الدائرة الثانية = طول السلك

٢س ط + ٢ص ط = ٢٤ ط وبقسمة الطرفين على ٢ ط ينتج

س + ص = ١٢

∴ ص = ١٢ ــ س

ليكن ق (س) = مساحة الدائرة الاولى + مساحة الدائرة الثانية

اى ق (س) = س^{٢} ط + (١٢ ــ س)^{٢} ط

قَ(س) = ٢س ط + ٢(١٢ ــ س) ط × (ــ ١)

= ٢س ط ــ ٢٤ ط + ٢س ط

= ٤س ط ــ ٢٤ ط

عندما قَ (س) = ٠ فان ٤ س ط ــ ٢٤ ط = ٠

∴ س = ٦ سم . نصف قطر الاولى

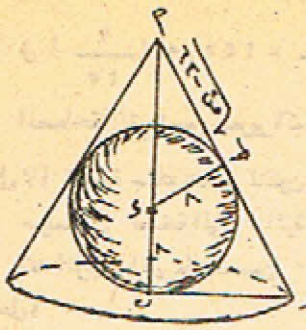
∴ ص = ١٢ ــ ٦ = ٦ سم نصف قطر الثانية

∴ طول القطعة الاولى = ١٢ ط سم وطول القطعة الثانية = ١٢ ط سم ايضا

مثال ٨)

كرة نصف قطرها ٨ سم موضوعة داخل مخروط دائرى قائم بحيث تمس قاعدته وسطحه الجانبي . احسب ارتفاع المخروط عندما يكون حجمه اصغر مايمكن .

الحل)



نفرض س = نصف قطر قاعدة المخروط

وارتفاعه = ص + ٨

من تشابه المثلثين القائمين أ ب حـ ، أ د ط

نحصل على

$$\frac{\text{س}}{\text{٨}} = \frac{\text{ص} + \text{٨}}{\sqrt{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٦٤}}}$$

$$\therefore \text{س}^{\text{٢}} = \frac{\text{٦٤}(\text{ص}+\text{٨})^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٦٤}} = \frac{\text{٦٤}(\text{ص}+\text{٨})}{\text{ص} - \text{٨}}$$

حجم المخروط = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\text{ح} = \frac{(\text{ط س}^{\text{٢}})\ (\text{ص}+\text{٨})}{\text{٣}} = \frac{\text{٦٤ ط}\ (\text{ص}+\text{٨})^{\text{٢}}}{\text{٣}\ (\text{ص}-\text{٨})}$$

$$\text{اى ق} : \{\text{ص} : \text{ص} > \text{٨}\} \longrightarrow \text{ح بحيث ق(ص)} = \frac{\text{٦٤ ط}(\text{ص}+\text{٨})^{\text{٢}}}{\text{٣}(\text{ص}-\text{٨})}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{ص}) = \frac{\text{٦٤ ط}\ (\text{ص}+\text{٨})(\text{ص}-\text{٢٤})}{\text{٣}(\text{ص}-\text{٨})^{\text{٢}}}$$

وعندما $\text{ق}'(\text{ص}) = \text{٠}$ فان ص = ٢٤

وبايجاد $\text{ق}''(\text{٢٤})$ نجد انها موجبة

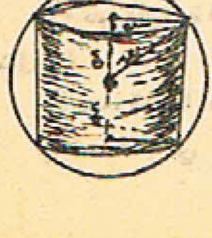
∴ للتطبيق اصغر قيمة محلية عند ص = ٢٤

∴ الارتفاع = ص + ٨ = ٣٢ سم

∴ نصف قطر قاعدة المخروط = $\text{٨}\sqrt{\text{٢}}$ سم

مثال ٩) اسطوانة دائرية قائمة موضوعة داخل كرة نصف قطر قاعدتها = نق احسب ارتفاعها عندما يكون حجمها اكبر مايمكن

الحل)



نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة

= س وارتفاعها (٢ع)

حجم الاسطوانة = ٢ ط $\text{س}^{\text{٢}}$ع

$\text{ح} = \text{٢ س}^{\text{٢}}\ \text{ط ع}$ ....(١)

$\text{نق}^{\text{٢}} = \text{ع}^{\text{٢}} + \text{س}^{\text{٢}}$ ...(٢)(فيثاغورس)

$\therefore \text{س}^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}} - \text{ع}^{\text{٢}}$

وبالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة $\text{س}^{\text{٢}}$ ينتج :ــ

ح = ٢ ط (نق٢ ـ ع٢) ع = ٢ ط نق٢ ع ـ ٢ ط ع٣

اى ق :]٠ ، نق[⟵ ح بحيث ق (ع) = ٢ ط نق٢ ع ـ ٢ ط ع٣

قَ(ع) = ٢نق٢ ط ـ ٦ ط ع٢ وعندما قَ(ع) = صفر

فان ٦ ط ع٢ = ٢ط نق٢

∴ ع٢ = (٢ ط نق٢) / (٦ ط) = (١ / ٣) نق٢

ع = (١ / √٣) نق

وبايجاد قً ((١ / √٣) نق) نرى انها سالبة

∴ توجد اعظم قيمة محلية للتطبيق عند ع = (١ / √٣) نق

∴ ع = (٢نق) / √٣

تمارين

١) الفرق بين عددين = أ ٠ جد هذين العددين بحيث يكون حاصل ضربهما اقل مايمكن ٠

٢) جد العدد الموجب الذى يختلف عن مربعه باكبر مقدار ممكن

٣) كرة نصف قطرها ٤ √٢ سم موضوعة داخل مخروط دائرى قائم ٠٠ جد ابعاد ذلك المخروط بحيث يكون حجمه اقل مايمكن ٠

٤) يراد صنع خزان ناقلة نفط على شكل اسطوانة احدى نهايتيها سطح مستوى والاخر نصف كرة فاذا كانت سعة هذا الخزان (أ٣ ط) / ٦ متر مكعب ٠ جد ابعاد ذلك الخزان لكي تكفي لصنعه اقل كمية ممكنة من المعدن ٠

٥) برهن ان اصغر معيّن يمكن رسمه خارج دائرة نصف قطرها نق هو مربع ٠

٦) جد ابعاد اكبر مخروط دائرى قائم يمكن صنعه داخل نصف كرة نصف قطرها أ والذى راسه يقع على مركز الكرة ٠

٧) مخروط مجموع نصف قطر قاعدته وارتفاعه ١٢ سم جد اعظم حجم لهذا المخروط ٠

٨) مستطيل مساحته ٢٥ سم٢ جد اقل محيط ممكن له ٠

٩) مستطيل مساحته ٣٠ سم٢ جد ابعاده بحيث يكون قطره اصغر مايمكن ٠

١٠) ماهو ابعاد اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من احدى نهايتيها ذات اكبر مساحة موضوعة داخل كرة نصف قطرها نق ٠

١١) طابوقة طولها ضعف عرضها فاذا كانت مساحتها الكلية ١٠٨ اً
جد اعظم حجم لهذه الطابوقة ٠

١) جد احداثيات نقطة ∋ المنحنى س ص٤ ـ ١٦ = صفر والتي تكون اقرب مايمكن لنقطة الاصل .

١٣) ب ك وترللمنحني $ص^٢ = ٤$ أس يوازى المحور الثاني . جـ نقطة ثابتة هـي (هـ ، ٠) جد اعظم مساحة للمثلث جـ ب ك . علما ان الوتر ب ك يقع بين نقطة الاصل ونقطة حـ .

١٤) برهن ان المستقيم ٤ص+ ٣س ـ ٢٢ = صفر يمس الدائرة $(س + ١)^٢ + ص^٢ = ٢٥$ واذا رسم داخل المثلث (المحدد بالمستقيم المماس والمحورين) مستطيل بحيث ان راسا من رؤوسه نقطة الاصل . فجد اعظم مساحة لهذا المستطيل ثم جد مساحة المثلث المحدد بالمستقيم المماس والعمود عليه من نقطة التماس ومحور السينات .

١٥) آب قطرا لدائرة حـ د وترا فيها // آب برهن ان اكبر محيط للشكل الرباعي آب حـ د = خمس امثال نصف قطر الدائرة .

١٦) مجموع وتر وضلع قائم لمثلث قائم الزاوية = أ سم برهن ان للمثلث اكبر مساحة عندما تكون الزاوية الحادة = ٦٠°

١٧) حجم مخروط ٢٠ سم٣ . . جد نصف قطر القاعدة عندما يكون سطح المخروط اصغر مايمكن .

١٨) محيط مثلث = ٣٦ سم واحد اضلاعه ضعف الاخر جد طول اقصر ضلع حين تكون للمثلث اقل مساحة ممكنة .

١٩) يراد صنع علبة اسطوانية مفتوحها سعتها ١٠٠٠ ط سم٣ من معدن رقيق . جد ابعاد الاسطوانة كي يكفي لصنعها اقل كمية ممكنة من المعدن .

٢٠) في الساعة التاسعة صباحا كانت الباخرة ب تبعد ٦٥ ميلا شرقي السفينة أ فاذا ابحرت السفينة ب غربا بسرعة ١٠ ميل / ساعة ، أ جنوبا بسرعة ١٥ ميل / ساعة متى يكون البعد بينهما اقصر مايمكن ؟ واحسب هذا البعد عندئذ .

٢١) اسطوانة دائرية قائمة موضوعة داخل مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٠ سم ونصف قطر قاعدته ٨ سم بحيث احدى قاعدتيها على قاعدة المخروط احسب ارتفاعها عندما يكون حجمها اكبر مايمكن .

٢٢) سلك طوله ل قسم الى جزئين . ثم ثني احد الجزئين على شكل مربع وثني الاخر على شكل مثلث متساوى الاضلاع . جد طول كل من جزأى السلك عندما يكون مجموع مساحتي المربع والمثلث اصغر مايمكن .

٢٣) اثبت ان نصف قطر قاعدة اكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائرى قائم نصف قطر قاعدته = نق يساوي $\frac{٢}{٣}$ نق

٢٤) وعاء ثابت الحجم على شكل اسطوانة دائرية قائمة وتكاليف المادة المصنوع منها الغطاء = ثلثي المادة المصنوع منها باقي الوعاء . فاذا كانت التكاليف اقل مايمكن اثبت ان ثلاثة امثال ارتفاع الوعاء = خمسة امثال نصف قطر قاعدته .

٢٥) منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث متساوي الاضلاع وحجمه ٢ قدما مكعبا اوجد ابعـــاده لتكون مساحة اوجهه الخمسة اقل مايمكـــن .

٢٦) يراد عمل خزان يسع ٢٠ ط قدم^{3} على هيئة اسطوانة دائرية قائمة فاذا كانـــت تكاليف صنع القاعدة ٤ دنانير لكل قدم مربع . وتكاليف صنع السطح الجانبي دينارات لكل قدم مربع . وتكاليف صنع الغطاء دينار واحد لكل قدم مربع . جد ابعـــــاد اوفر خزان يمكن عملـــه .

٢٧) خزان للماء الساخن قاعدته افقية على شكل اسطوانة دائرية قائمة تعلوه نصـــف كرة بحيث كانت المساحة الكلية للخزان ثابتة وتساوى ٢٠ ط أ^{2} . اثبت انه اذا كان حجم الخزان اكبر مايمكن فان نصف قطر قاعدة الاسطوانة يساوى ارتفاعها .

٢٨) خيمة مخروطية الشكل حجمها ثابت ح . اثبت ان ارتفاعها = $\sqrt{٢}$ نق حيـث نق نصف قطر قاعدتها . وان مساحة القماش المصنوع منه الخيمة اقل مايمكن .

٢٩) أ ب حـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ قدم ، ب حـ = ١٢ قدم ونقطة هـ على ب حـ فاذا كان (آ هـ)^{2} + (هـ حـ)^{2} أصغر مايمكن . اثبت ان هـ منتصف ب حـ

٣٠) اثبت ان المثلث المتساوى الساقين المرسوم خارج دائرة والذى تكون مساحته اصغر مايمكن هو متساوى الاضلاع .

٣١) خط مستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ويقطع المحورين في النقطتين أ ، ب علـــى الترتيب جد اصغر مساحة ممكنة للمثلث المحصور بين المستقيم أ ب ونقطة الاصل .

٣٢) اثبت ان المستطيل الذى مساحته اكبر مايمكن ومحيطه معلوم هو مربـــع .

٣٣) المستقيم ا ب محصور بين المستقيم ص = ٢س والمنحني ص = ½ س^{2} وامتـــداد آ ب عمودى على محور السينات . جد اكبر طول ممكن للمستقيم آ ب .

٣٤) مثلث قائم الزاوية معلوم وتره . يدور حول احد ضلعيه القائمين فيصنع مخـــروط دائرى قائم . احسب حجم اكبر مخروط .

٣٥) جد النقاط على المنحني ٥س^{2} ــ ٦س ص + ٥ص^{2} = ٤ والتي تكون اقرب مايمكـــن من نقطة الاصل .

٣٦) المثلث أ ب حـ فيه آ ب = أ حـ رأسه آ في نقطة الاصل وان ب حـ // محور السينـات وان النقطتين ب ، حـ على المنحنى ١٢ ص = ٣٦ ــ س^{2} . احسب مساحته عند مـا يكون اكبر مايمكـــــن .

ملاحظات / لرسم المخطط الديكارتي يمكن اتباع الملاحظات التالية :ـ

١ـ نجد نقاط التقاطع مع المحورين ·

٢ـ نجد التناظر مع المحورين : لقد سبق ان بحثنا موضوع التناظر مع نقطة الاصـل ومع المحور الثاني في فصل التطبيقات العدديـة ·

اما بالنسبة للتناظر مع المحور الاول فيمكن تعريفه كما يلي :ـ

اذا كان س = ق (ص) فان ق (ـص) = ق (ص) ∀ ص

او ∀ (أ ، ب) (اذا كانت (أ ، ب) ∋ المنحني فان (أ ، ـب) ∋ المنحني

٣ـ جد اكبر منطلق واكبر مدى للتطبيق · وقد سبق ان تطرقنا الى ايجاد اكبر منطلـق في فصل التطبيقات العددية وبحثنا حدود التطبيق فهي تمثل اكبر مدى له ·

٤ـ المستقيمات المحاذيـة :

ليس لكل المنحنيات مستقيمات محاذية ـ وليست كل المحاذيات يجب ان توازي احـد المحورين ولكن ضمن الدراسة الاعدادية سنكتفي بدراسة المستقيمات المحاذيـة العمودية او الافقيـة وللتطبيقات التي يمكن وضعها بالصورة $ص = أ + \frac{ب}{حـ س + د}$

حيث كل من أ ، ب ، حـ ، د اعداد حقيقية ثابتة ، $س \neq -\frac{د}{حـ}$

فان المستقيم المحاذي الافقي هو ص = أ والمستقيم المحاذي العمودي $س = -\frac{د}{حـ}$

٥ـ جد النقاط الحرجة للتطبيق ومن ثم القيم العظمى والصغرى المحلية ·

٦ـ الفترات التي يكون فيها التطبيق متزايد او متناقص

٧ـ تقعر التطبيق وتحدبه ونقاط الانقلاب

وفيما يلي امثلـة توضيحيـة ·

امثلـة محلولـة

ناقش المنحنيات التالية ثم مثلها ديكارتيـا

١) $ق(س) = ٩س - \frac{س^٣}{٣}$

١) اكبر منطلق للتطبيق = ح لان التطبيق كثير الحدود

واكبر مدى ح ايضا لان التطبيق غير محدود من الاعلى وغير محدود من الاسفل ·

٢) لايجاد نقاط التقاطع مع المحورين

ليكن س = ٠ فان ق (س) = صفر اى ان المنحني يمر بنقطة الاصل ·

عندما ق(س) = ٠ فان ٩ س ـ $\frac{س^٣}{٣}$ = ٠

اى س (٩ ـ $\frac{١}{٣}$ س٢) = ٠

∴ اما س = ٠ او س = ∓ ٣ $\sqrt{٣}$

∴ (٣ $\sqrt{٣}$ ، ٠) ، (ـ٣ $\sqrt{٣}$ ، ٠) ، (٠ ، ٠) نقاط التقاطع مع المحور الاول ·

٣) ق(س) = ٩س ـ $\frac{١}{٣}$ س٣

ق(ـ س) = ـ٩س + $\frac{١}{٣}$ س٣

ـ ق (ـ س) = ٩ س ـ $\frac{س^٣}{٣}$ = ق (س)

∴ ق متناظر حول نقطة الاصل

٤) لاتوجد مستقيمات محاذية عمودية ولا افقيـة

٥) قَ(س) = ٩ ـ س٢ = (٣ ـ س) (٣ + س)

ق متزايد في] ـ٣ ، ٣ [

ق متناقص في ح / [ـ٣ ، ٣]

ق(٣) = ١٨ اعظم قيمة محلية

ق(ـ٣) = ـ١٨ اصغر ·

ـ٣ ٣

اشارة ٣ ـ س	ـ ـ ـ	+ + +	+ +
اشارة ٣ + س	+ +	+ +	ـ ـ ـ
اشارة قَ(س)	ـ ـ ـ	+ + +	ـ ـ ـ

متناقص ↘ متزايد ↗ متناقص ↘

ـ ـ ـ ـ ـ | + + + + +

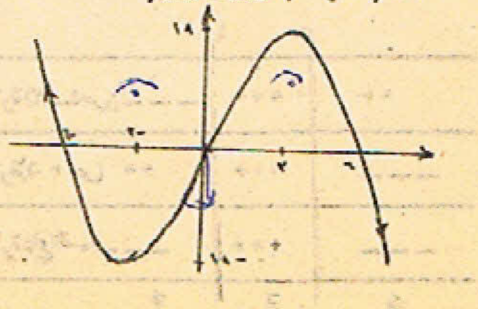
قً(س) محدب مقعر

٦) قً(س) = ـ٢س

ق محدب ∀ س > صفر

ومقعر ∀ س < صفر

∴ (٠ ، ٠) نقطة انقلاب



مثال ٢) ليكن $ق(س) = \frac{٣س + ٢}{س - ٢}$

١) اكبر منطلق هو ح /{٢}٠ و ق غير محدود (برهن ذلك)

٢) ق غير متناظر مع اى من المحورين او نقطة الاصل

٣) التقاطع مع المحورين

ليكن ق(س) = صفر ⟸ س = $\frac{-٢}{٣}$ ⟸ $(\frac{-٢}{٣}، ٠)$ ∈ ق

وليكن س = ٠ ⟸ ق(س) = $-١\frac{٣}{}$ ⟸ $(٠ ، -١\frac{٣}{})$ ∈ ق

٤) المستقيمات المحاذية : بالقسمة نحصل على

$ق(س) = ٣ + \frac{٨}{س - ٢}$

∴ ص = ٣ هو المحاذى الافقي ، س = ٢ المحاذى العمودى

٥) $ق'(س) = \frac{-٨}{(س - ٢)^{٢}}$ < صفر ∀ س ∈ ح /{٢}

∴ ق متناقص في ح /{٢}

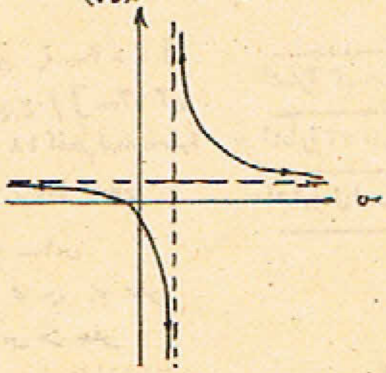
∴ لاتوجد اعظم قيمة محلية او اصغر قيمة محلية

٦) $ق''(س) = \frac{١٦}{(س - ٢)^{٣}}$

ق''(س) : — — — — ٢ + + + + + +

محدب   مقعر

ق محدب ∀ س < ٢ ومقعر ∀ س > ٢



مثال ٣) ق : ح ⟵ ح بحيث

$ق(س) = \frac{٤ - س^{٢}}{٤ + س^{٢}}$

١) ق محدود

البرهان/

ليكن $ص = \frac{٤ - س^{٢}}{٤ + س^{٢}}$

$٤ص + ص س^{٢} = ٤ - س^{٢}$

$س^{٢} + ص س^{٢} = ٤ - ٤ص$

$س = \sqrt{\frac{٤ - ٤ص}{١ + ص}}$

	١		٢	
اشارة (٤ - ٤ص)	— — —	+ + +		+ +
اشارة (١ + ص)	+ +	+ + +		— — —
اشارة ناتج القسمة	— — —	+ + +		— — —
	∉	∈		∉

مدى ق = $[-1 ، 1]$

٢) التقاطع مع المحورين

ليكن ق (س) = ٠ ∴ س = $\pm$ ٢ ، ∴ $(-2 ، 0)$ ، $(2 ، 0)$

نقطتا تقاطع المنحني مع المحور الاول

ق(٠) = ١ ∴ $(0 ، 1)$ نقطة التقاطع مع المحور الثاني

٣) ق (ـ س) = $\dfrac{4 - \text{س}^2}{4 + \text{س}^2}$ = ق(س)

∴ ه متناظر مع المحور الثاني

٤) المستقيمات المحاذية

ق (س) = ـ ١ + $\dfrac{8}{\text{س}^2 + 4}$

∴ ص = ـ ١ المحاذى الافقي

ولايوجد محاذ شاقولي

٥) قَ (س) = $\dfrac{(4 + \text{س}^2)(-2\text{س}) - (4 - \text{س}^2)(2\text{س})}{(4 + \text{س}^2)^2}$ =

$\dfrac{-16\text{س}}{(4 + \text{س}^2)^2}$

اشارة قَ(س)

صفر

+ + + + + ٠٠ ـ ـ ـ ـ ـ ـ

↗ متزايد   ↘ متناقص

ق متزايد ∀ س ≤ صفر

ومتناقص ∀ س > صفر

ق(٠) = ١ اعظم قيمة محلية

٦) قً(س) = $\dfrac{16(3\text{س}^2 - 4)}{(4 + \text{س}^2)^3}$

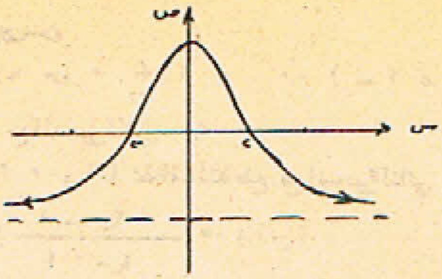
= $\dfrac{16(\sqrt{3}\text{س} - 2)(\sqrt{3}\text{س} + 2)}{(4 + \text{س}^2)^3}$

		$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
اشارة ($\sqrt{3}$س ـ ٢)	+ + +	ـ ـ ـ	ـ ـ ـ
اشارة $\sqrt{3}$س + ٢	+ +	+ + +	ـ ـ ـ
اشارة قً(س)	+ + + +	ـ ـ ـ	+ + +
	مقعر	محدب	مقعر

ق محدب ∀ س ∈ $\left[\frac{-2}{\sqrt{3}} ، \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$

ق مقعر ∀ س ∈ ح / $\left]\frac{-2}{\sqrt{3}} ، \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$

($\pm$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{3}{4}$) نقطتي الانقلاب



مثال٤) ليكن ق : ح ← ح بحيث ق (س) = س٤ ــ ٤س٣

(١) نقاط التقاطع مع المحورين

ق(س) = ٠ ⟸ س٣ (س ــ ٤) = ٠ ⟸ اما س = صفر او س = ٤

∴ (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) نقطتا تقاطع المنحني مع المحور الاول

عندما س = ٠ فان ق(٠) = ٠ اى ان المنحني يمر بنقطة الاصل .

(٢) المنحني غير متناظر

(٣) لاتوجد مستقيمات محاذية عمودية او افقيــة

(٤) قَ (س) = ٤س٣ ــ ١٢س٢

= ٤س٢ (س ــ ٣)

ق متزايد ∀ س > ٣

ق متناقص ∀ س ∈

{س : س < ٣ } / {صفر}

ق(٣) = ــ ٢٧ اصغر قيمة محلية

(٠ ، ٠) نقطة حرجة (كزلاره (٢ ، ــ ٢٧)

	٣	صفر	
اشارة ٤س٢	++	++	++++
اشارة (س ــ ٣)	+	ـــ	ـــــــ
اشارة قَ (س)	+	ـــ	ـــــــ
	متزايد	متناقص	متناقص

(٥) قً (س) = ١٢س٢ ــ ٢٤س

= ١٢س (س ــ ٢)

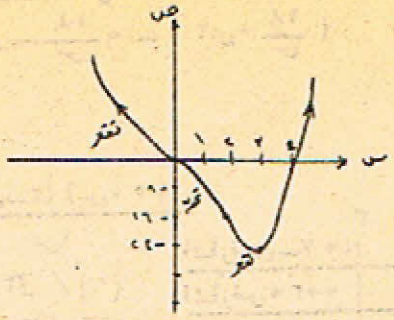
ق محدب في] ٠ ، ٢ [

ق مقعر في ح / [٠ ، ٢]

(٠ ، ٠) ، (٢ ، ــ ١٦) نقطتي انقلاب

	٢	صفر	
اشارة ١٢س	++++	+++	ـــــــ
اشارة س ــ ٢	+++	ـــــ	ـــــــ
اشارة قً (س)	+++	ـــــ	++++
	مقعر	محدب	مقعر

(٦) ق محدود من الاسفل لان ق(س) $\geqslant$ -٢٧



مثال ٥)

ليكن ق : ح / {٠} $\longrightarrow$ ح بحيث ق (س) = آ س + $\frac{ب}{س}$

اذا كان النقطة (٣ ، ١٢) نقطة حرجة فجد قيمة آ ، ب وناقش بيان التطبيق ومثله بيانيا .

$\because$ (٣ ، ١٢) نقطة حرجة $\therefore$ تحقق معادلة بيان التطبيق ق

اى ق (٣) = ١٢ $\therefore$ ٣ آ + $\frac{ب}{٣}$ = ١٢

$\therefore$ ٩ آ + ب = ٣٦ ..... (١)

بما ان (٣ ، ١٢) نقطة حرجة و ق قابل للاشتقاق عند ٣

$\therefore$ ق َ (٣) = صفر

$\therefore$ ق َ (س) = آ $-$ $\frac{ب}{س^٢}$

ق َ (٣) = آ $-$ $\frac{ب}{٩}$

صفر = آ $-$ $\frac{ب}{٩}$

٩ آ $-$ ب = صفر ..... (٢)

نحل المعادلتين (١) و (٢) آنيا نجد آ = ٢ ، ب = ١٨

$\therefore$ ق (س) = ٢س + $\frac{١٨}{س}$

(١) التقاطع مع المحورين س $\neq$ ٠ $\therefore$ المنحنى لايقطع المحور الثاني عندما ق(س) = صفر فان ٢س٢ + ١٨ = ٠

ليس لها حل $\therefore$ لاتوجد نقاط تقاطع مع المحور الاول

(٢) المستقيمات المحاذية العمودية والافقية

س = صفر محاذ شاقولي . لايوجد محاذى افقي ولكن يوجد محاذى مائل هو

ص = ٢س

(٣) التناظر : ق متناظر مع نقطة الاصل

لان ق (ــ س) = ــ٢س ــ $\frac{١٨}{س}$ = ــ (٢س + $\frac{١٨}{س}$)

= ــ ق (س)

(٤) ق$'$(س) = ٢ ــ $\frac{١٨}{س^٢}$

= $\frac{٢س^٢ ــ ١٨}{س^٢}$ = $\frac{٢(س ــ ٣) (س + ٣)}{س^٢}$

ق متناقص في] ــ٣ ، ٣ [/ { ٠ }

ق متزايد في ح / [ــ٣ ، ٣]

ق(ــ٣) = ــ١٢ = اعظم قيمة محلية

ق(٣) = ١٢ اوطا قيمة محلية

	٣	صفر ٣	
اشارة س ــ ٣	++	ــ ــ	ــ ــ
اشارة س + ٣	++	+ +	ــ ــ ــ
اشارة س٢	+	++ ++	++
اشارة ق$'$(س)	++	ــ ــ ــ ــ	++

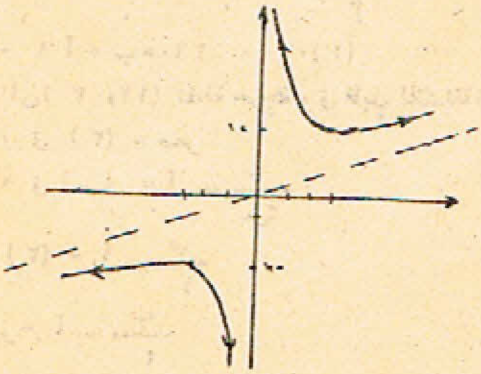
(٥) ق$''$(س) = $\frac{١٦}{س^٣}$

	صفر	
اشارة ق$''$(س)	+ + ++	ــ ــ ــ
	مقعر	محدب

ق مقعر ∀ س > صفر ،

ق محدب ∀ س < صفر

لاتوجد نقاط انقلاب



مثال ٦) اذا كانت النقطة (ــ ١ ، ــ ٩) نقطة حرجة لبيان التطبيق

ق(س) = أ س٣ + ب س٢ + حـ س + ٢

اما النقطة (١ ، ٧) فهي نقطة انقلاب علما ان ق قابل للاشتقاق عند ١ .

جد قيم أ ، ب ، حـ ، د وناقش المنحني ومثله بيانيا .

الحل)

(١) (ــ ١ ، ــ ٩) تحقق معادلة التطبيق

∴ ــ ٩ = ــ أ + ب ــ حـ + د ....(١)

(٢) ق$'$ (ــ ١) = صفر

اى ق$'$ (س) = ٣ أ س٢ + ٢ ب س + حـ

قً (ـ ١) = ـ٣ أ ـ ٢ب + حـ = صفر ...(٢)

وبما ان (١ ، ٧) ∋ ق فهي تحقق معادلته

اى ٧ = أ + ب + حـ + د .....(٣)

(٢) قً(١) = صفر

قً(س) = ٦ أس + ٢ب

قً(١) = ٦ أ + ٢ب = صفر ....(٤)

وبحل المعادلات الاربعة انيا نجد أ = ـ١ ، ب = ٣ ، حـ = ٩ ، د = ـ٤

∴ ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٩س ـ ١١

قَ (س) = ـ٣س^{٢} + ٦س + ٩

= ـ٣(س^{٢} ـ٢س + ٣)

= ـ٣(س ـ٣) (س + ١)

	٣		ـ١	
اشارة س ـ٣	++		ـ ـ ـ	ـ ـ ـ
اشارة س + ١	++		+++	ـ ـ ـ
اشارة (س ـ٣) × (س + ١)	++		ـ ـ ـ	+++
اشارة قَ(س)	ـ ـ ـ		+++	ـ ـ ـ
	متناقص		متزايد	متناقص

ق متناقص في ح /]ـ١ ، ٣[

ق متزايد في]ـ١ ، ٣[

اعظم قيمة محلية = ق(٣) = ١٦

اوطا قيمة محلية = ق(ـ١) = ـ١٦

قً(س) = ـ٦س + ٦ = ٦(١ ـ س)

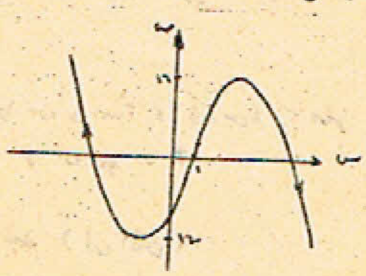
٦(١ ـ س)	++++	ـ ـ ـ ـ ـ ـ
	محدب	مقعر

(نقطة التقسيم: ١)

ق محدب ∀ س > ١

ومقعر ∀ س < ١

نقطة الانقلاب (١ ، صفر)



تمارين

١) ارسم مخططا ديكارتيا للمنحنى ص = ق (س) من المعلومات التالية :ـ

ق(١) = صفر ، قَ(س) < صفر ∀ س < ١ ، قَ(س) > صفر ∀ س > ١ .

(٢) ارسم مخططا ديكارتيا للمنحنى ص = ق (س) ومن المعلومات التاليـــة

ق(١) = صفر ، قً(س) < صفر ∀ س < ١ ، قًّ(س) > صفر ∀ س > ١

من تمرين (٣ الى ٨) ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق مؤشرا على اعظم قيمة محلية واصغر قيمة محلية ونقطة الانقلاب ان وجدت :ـ

٣) ص = ٦ ـ ٢س ـ س^٢

٤) ص = ٢س^٢ ـ ٤س + ٣   (٥) ص = ١٢ ـ ١٢س + س^٣

٦) ص = س^٤ ـ ٣٢س + ٤٨   (٧) ص = س^٣ ـ ٣س^٢ + ٢

٨) ص = ١/٦ (س^٣ ـ ٦س^٢ + ٩س + ٦)

٩) ارسم مخططا ديكارتيا لتطبيق مستمر ص = ق(س)

ومن الخواص التالية :ـ

ق(ـ٢) = ٨   قَ(٢) = قَ(ـ٢) = صفر

ق(٠) = ٤   قَ(س) < صفر ∀ س ∋]ـ٢ ، ٢[

ق(٢) = صفر   قًّ(س) < صفر ∀ س < صفر

قَ(س) > صفر ∀ س ∋ ح / [ـ٢ ، ٢]   قًّ(س) > صفر ∀ س > صفر

١٠) ارسم مخططا ديكارتيا لتطبيق مستمر ص = ق(س)

والذي فيه قَ(س) > صفر ∀ س < ٢ ، قَ(س) < صفر ∀ س > ٢

آ) اذا قَ(س) مستمر عند س = ٢

ب) اذا قَ(س) ⟵ ١ عندما س ⟵ ٢⁻

قَ(س) ⟵ ـ١ عندما س ⟵ ٢⁺

جـ) اذا قَ(س) = ١ ∀ س < ٢ وقَ(س) = ـ١ ∀ س > ٢

١١) ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق ومن الشروط التالية :ـ

١) ق مستمر لجميع قيم س

٢) ق(ـ٣) = ١

٣) قَ(س) < صفر ∀ س < ـ٣ ، قَ(س) > صفر ∀ س > ـ٣

٤) قًّ(س) > صفر ∀ س ≠ ـ٣

١٢) لكل من التطبيقات التالية جد (ان امكن)

١) مناطق التزايد والتناقص

٢) اعظم واصغر قيمة محليا

٣) النقاط الحرجة

٤) مناطق التحدب والتقعر

٥) نقاط الانقلاب

٦) التناظر

تمثل كلا منها ديكارتيا بعد تحديد اكبرمنطلق

1) $ق(س) = س^{٣} - ٢٧س + ٤$

2) $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٦س - ٤$

3) $ق(س) = س^{٤} + ٤س^{٣}$

4) $ق(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} - ٢س^{٢} + ١٢س - ٨$

5) $ق(س) = ٢س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}$

6) $ق(س) = \frac{٢س}{س^{٢} + ١}$

7) $ق(س) = س\sqrt{س + ٣}$

8) $ق(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} + ٤س - ١$

9) $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٣س - ٥$

10) $ق(س) = س^{٣} - س^{٢} + س - ١$

11) $ق(س) = (س + ٢)(س - ٢)^{٣}$

12) $ق(س) = س^{٤} - ٣س^{٣} + ٣س^{٢}$

13) $ق(س) = س^{٤} + ٥س^{٣} + ٦س^{٢}$

14) $ق(س) = س - ٣ + \frac{٢}{س + ١}$

15) $ق(س) = ٥س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{٥}{٣}}$

16) $ق(س) = س\sqrt{٨ - س^{٢}}$

17) $ق(س) = س^{٢}\sqrt{٥ + س}$

18) $ق(س) = س^{٢}\sqrt{٣ - س^{٢}}$

19) $ق(س) = س + \frac{٨}{س^{٢}}$

20) $ق(س) = س^{٢} + \frac{٢}{س}$

21) $ق(س) = س^{٣} + \frac{٣}{س}$

الفصل السادس

التكامـــــل Integration

بند ٦ـ١ مفهوم التكامل غير المحدود

ان مفهوم تعيين مشتق تطبيق مفروض او تعيين تفاضله يعتبر من المهام الرئيسيـــة في الحساب التفاضلي .

واما المسالة المعاكسة وهي تعيين تطبيق بدءا من مشتقه او من تفاضله فتعتبـــر المهمة الرئيسية الاولى للحساب التكاملي .

ليكن صَ = ق(س) لتطبيق مجهول ص ، او تفاضل هذا التطبيق
دص = قَ(س) د س

ولنسمي التطبيق ع (س) الذى مشتقه ق (س) او تفاضله ق (س) د س تطبيقا اصليا لـ ق(س) . فاذا كان على سبيل المثال ق (س) = س٢ فعندئذ يكون
ع (س) = $\frac{١}{٣}$ س٣ هو احد تطبيقاته الاصلية وذلك لان ($\frac{١}{٣}$ س٣)َ =
$\frac{١}{٣}$ (٣س٢) = س٢

ولنفرض اننا تمكنا من الوصول الى تطبيق اصلي ع (س) لتطبيق مفروض ق(س) .
اى تمكنا من الوصول الى ع (ص) يحقق العلاقة : عَ (س) = ق (س) وحيـــث ان مشتق اى ثابت اختيارى حـ يساوى الصفر ، فان (ع (س) + حـ)َ =
عَ (س) = ق (س) .

وهذا يعني ان ع (س) ليس وحده تطبيقا اصليا بل ان ع (س) + حـ هو كذلك تطبيق اصلي لـ ق (س) . فاذا استطعنا اذن الوصول الى تطبيق اصلي لمسالـــة ما فاننا نكون في الوقت نفسه حصلنا على مجموعة غير منتهية الحلول الاخرى التي لاتختلف عن الحل المذكور الا بثابت اضافي . وسنبرهن فيما يلي على ان هذه المجموعة من الحلــول تمثل جميع حلول المسالة المطروحة .

> اى اذا كان ع (س) تطبيقا اصليا لتطبيق مفروض ق(س) فعندئذ تكون العبـارة العامة للتطبيق الاصلي من الشكل ع (س) + حـ بفرض ان حـ ثابت كيفي .

ولبرهان ذلك نفرض ع$_١$ (س) تطبيقا كيفيا مشتقه ق (س)
اى عَ$_١$ (س) = ق (س) كذلك وبطرح هذه المعادلة من السابقة نجد ان :
عَ$_١$(س) ــ عَ (س) = (ع$_١$(س) ــ ع (س))َ = صفر
ومنه نستنتج ان ع$_١$ (س) ــ ع (س) = حـ بفرض حـ كمية ثابتة

(اذا كان لتطبيقين نفس المنطلق ونفس المشتق فان الفرق بينهما ثابتا)

تسمى العبارة العامة للتطبيق الاصلي " التكامل غير المحدود للتطبيق المفروض ق(س) او للتفاضل المفروض ق(س) د س • ونرمز له بالشكل

∫ ق(س) د س ، وهو التطبيق الذى مشتقه ق(س) او ذلك التطبيق الذى يكون تفاضله مساويا ق (س) د س •

نسمي التطبيق ق(س) التطبيق المكامل • وتسمى ق(س) د س العبارة التفاضلية للتكامل •

بند ٦ ـ ٢ خواص التكامل غير المحدود

١) اذا تساوى تطبيقان فعندئذ لايختلف التكامل غير المحدود لاحدهما عن التكامل غير المحدود للاخر الا بثابت اضافي • وبالعكس كي نتحقق من عدم اختلاف تطبيقين إلا بثابت اضافي يكفي ان نبرهن تساوى مشتقيهما •

٢) ان مشتق التكامل غير المحدود مساو للتطبيق المكامل وان تفاضله مساو للعبارة التفاضلية للتكامل •

اى (د / د س) [∫ ق (س) د س] = [∫ ق(س) د س]′ = ق (س)

او د [∫ ق(س) د س] = ق(س) د س

٣) ∫ ع′ (س) د س = ع (س) + حـ

او ∫ د ع(س) = ع (س) + حـ

ويستنتج من هذا ومن الخاصية (٢) انه اذا وردت الاشارتان د ، ∫ الواحدة تلو الاخرى مباشرة وبأى ترتيب فان الواحدة منهما تنفي تاثير الاخرى وذلك اذا تم الاتفاق على غض النظر عن الثابت الكيفي في اية مساواة بين تكاملات غير محددة

٤) يمكن اخراج المعامل الثابت المضروب في التطبيق المكامل خارج علامة التكامل غير المحدود اى انه اذا كان أ عددا حقيقيا ثابتا فان

∫ أ ق (س) د س = أ ∫ ق(س) د س

٥) التكامل غير المحدود للمجموع الجبرى لعدة تطبيقات عددية يساوى المجموع الجبرى لتكاملات حدوده •

اى ∫ (ق (س) + ل (س) + ع (س) + ــــــ) د س = ∫ ق(س) د س + ∫ ل (س) د س + ∫ ع (س) د س + ــــــ

٦) ∫ س^ن د س = س^(ن + ١) / (ن + ١) + حـ حيث ن ≠ ـ ١ ، حيث حـ ثابت يمكن

استنتاج الخاصية التالية :ــ

$$\int \text{دس} = \int \text{س}^{\text{صفر}}\,\text{دس} = \text{س} + \text{ح}$$

٧) اذا كان ق قابلا للاشتقاق وتفاضله $\bar{\text{ق}}(\text{س})$ دس فان

$$\int [\text{ق}(\text{س})]^{\text{م}}\ \bar{\text{ق}}(\text{س})\ \text{دس} = \frac{[\text{ق}(\text{س})]^{\text{م}+1}}{\text{م}+1} + \text{ح} \quad \text{حيث م} \neq -1$$

امثلــة محلولــة

١) جد $\int \text{س}^{5}\ \text{دس}$

الحل) بتطبيق الخاصية (٦) فان $\int \text{س}^{5}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{5+1}}{5+1} + \text{ح} = \frac{\text{س}^{6}}{6} + \text{ح}$

٢) جد $\int \sqrt[3]{\text{س}^{2}}\ \text{دس}$

الحل) $\int \sqrt[3]{\text{س}^{2}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{2}{3}}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{ح} = \frac{3}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{3}} + \text{ح}$

٣) جد $\int (\text{س}+1)(\text{س}-2)\ \text{دس}$

الحل) بفك التطبيق المكامل نجد ان

$$\int (\text{س}+1)(\text{س}-2)\,\text{دس} = \int (\text{س}^{2} - \text{س} - 2)\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{2}\,\text{دس} - \int \text{س}\,\text{دس} - \int 2\,\text{دس}$$

وبتطبيق الخاصية (٥) :

$$= \int \text{س}^{2}\,\text{دس} - \int \text{س}\,\text{دس} - 2\int \text{دس}$$ بتطبيق الخاصية (٤)

$$= \frac{\text{س}^{3}}{3} + \text{ح}_1 - \frac{\text{س}^{2}}{2} + \text{ح}_2 - 2\text{س} + \text{ح}_3$$ بتطبيق الخاصية (٦)

وبفرض ان $\text{ح}_1 + \text{ح}_2 + \text{ح}_3 = \text{ح}$ فان الناتج

$$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} - \frac{1}{2}\text{س}^{2} - 2\text{س} + \text{ح}$$

ملاحظة / سوف لانضيف في الامثلة القادمة ثابت الى كل حد من حدود المقدار المكامل وانما سنكتفي باضافة الثابت ح الى ناتج التكامل النهائي .

٤) اذا كان ق : ح / { ٠ } ⟵ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{2} - 2\text{س} + 3}{\text{س}^{2}}$

فجد $\int \text{ق}(\text{س})\ \text{دس}$

الحل) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{2} - 2\text{س} + 3}{\text{س}^{2}} = \frac{\text{س}^{2}}{\text{س}^{2}} - \frac{2\text{س}}{\text{س}^{2}} + \frac{3}{\text{س}^{2}} = 1 - \frac{2}{\text{س}} + \frac{3}{\text{س}^{2}}$

$$\therefore \int \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \int \left(1 - \frac{2}{\text{س}^{2}} + \frac{3}{\text{س}^{3}}\right) \text{د س} = \int \text{د س} - \int 2\,\text{س}^{-2}\,\text{د س} + \int 3\,\text{س}^{-3}\,\text{د س}$$

$$= \text{س} - \frac{2\,\text{س}^{-1}}{-1} + 3\,\frac{\text{س}^{-2}}{-2} + \text{جـ} = \text{س} + \frac{2}{\text{س}} - \frac{3}{2\,\text{س}^{2}} + \text{جـ}$$

٥) اذا كان ق: ح / {٢} ⟵ ح بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{3} - 8}{\text{س} - 2}$

فجد $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$

الحل) بتحليل البسط فرق مكعبين ينتج :ـ

$$\int \frac{\text{س}^{3} - 8}{\text{س} - 2}\,\text{د س} = \int \frac{(\text{س} - 2)(\text{س}^{2} + 2\text{س} + 4)}{(\text{س} - 2)}\,\text{د س}$$

وبما ان $\text{س} \neq 2$

$\therefore$ $\text{س} - 2 \neq$ صفر

نقسم البسط والمقام على (س ـ ٢)

$$\therefore \int \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \int (\text{س}^{2} + 2\text{س} + 4)\,\text{د س} = \int \text{س}^{2}\,\text{د س} + 2\int \text{س}\,\text{د س} + 4\int \text{د س}$$

$$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} + \text{س}^{2} + 4\text{س} + \text{جـ}$$

مثال ٦) جد $\displaystyle\int \frac{\text{م}^{4} + \text{م}^{2} + 1}{\text{م}^{2} + \text{م} + 1}\,\text{د م}$

الحل) $\displaystyle\int \frac{\text{م}^{4} + \text{م}^{2} + 1}{\text{م}^{2} + \text{م} + 1}\,\text{د م} = \int (\text{م}^{2} - \text{م} + 1)\,\text{د م}$ وذلك بقسمة البسط على المقام قسمة مطولة كما يلي :ـ

$$= \int \text{م}^{2}\,\text{د م} - \int \text{م}\,\text{د م} + \int \text{د م}$$

$$= \frac{1}{3}\text{م}^{3} - \tfrac{1}{2}\text{م}^{2} + \text{م} + \text{جـ}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \text{م}^{2} - \text{م} + 1 \\ \hline
\text{م}^{2} + \text{م} + 1 & \text{م}^{4} + \text{م}^{2} + 1 \\
 & \mp \text{م}^{4} \mp \text{م}^{3} \mp \text{م}^{2} \\ \hline
 & -\text{م}^{3} + 1 \\
 & \pm \text{م}^{3} \pm \text{م}^{2} \pm \text{م} \\ \hline
 & \text{م}^{2} + \text{م} + 1 \\
 & \mp \text{م}^{2} \mp \text{م} \mp 1 \\ \hline
\end{array}$$

مثال ٧) جد $\int (2\text{س} - 3)^{\frac{1}{2}}\,\text{د س}$

باستخدام الخاصية السادسة الواردة في (بند ٦ـ٢)

اى $\int (2\text{س} - 3)^{\frac{1}{2}}\,\text{د س} =$

$\int (2\text{س} - 3)^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2}\,\text{د س} = \frac{1}{2}$

$$\int (\text{٢س} - ٣)^{\frac{1}{2}} (\text{٢ دس}) =$$

$$\frac{1}{2} \int (\text{٢س} - ٣)^{\frac{1}{2}} \, \text{د} (\text{٢س} - ٣) = \frac{\frac{1}{2} (\text{٢س} - ٣)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{حـ} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (\text{٢س} - ٣)^{\frac{3}{2}} + \text{حـ}$$

$$= \frac{1}{3} (\text{٢س} - ٣)^{\frac{3}{2}} + \text{حـ}$$

مثال ٨) $\int \frac{\text{دس}}{(\text{٣س} + ٥)^{2}} = \int (\text{٣س} + ٥)^{-2} \, \text{دس} = \frac{1}{3} \int (\text{٣س} + ٥)^{-2} (\text{٣ دس})$

$$= \frac{1}{3} \int (\text{٣س} + ٥)^{-2} \, \text{د} (\text{٣س} + ٥) = \frac{1}{3} \left(\frac{\text{٣س} + ٥}{-1} \right)^{-1} + \text{حـ}$$

$$= -\frac{1}{3} (\text{٣س} + ٥)^{-1} + \text{حـ} = -\frac{1}{3(\text{٣س} + ٥)} + \text{حـ}$$

مثال ٩) جد $\int \frac{\text{س دس}}{\sqrt{\text{٢س}^{2} + ٥}}$

الحل) $\int \frac{\text{س دس}}{\sqrt{\text{٢س}^{2} + ٥}} = \int (\text{٢س}^{2} + ٥)^{-\frac{1}{2}} \, \text{س دس} = \frac{1}{4} \int (\text{٢س}^{2} + ٥)^{-\frac{1}{2}} \, \text{٤س دس}$

$$= \frac{1}{4} \int (\text{٢س}^{2} + ٥)^{-\frac{1}{2}} \, \text{د} (\text{٢س}^{2} + ٥) = \frac{1}{4} \left(\frac{\text{٢س} + ٥}{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \text{حـ}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\text{٢س} + ٥} + \text{حـ}$$

مثال ١٠) اذا كان التطبيق المكامل عبارة عن حاصل ضرب فانه احيانا يكون مفيدا ان تضع احد الحدود في صورة اخرى بحيث لاتتغير قيمته فمثلا

$$\int \text{س} \sqrt{\text{س} + 1} \, \text{دس}$$

$= \int (\text{س} + 1 - 1) \sqrt{\text{س} + 1} \, \text{دس}$ (وذلك باضافة وطرح (١) من س)

$$= \int \left\{ (\text{س} + 1) \sqrt{\text{س} + 1} - \sqrt{\text{س} + 1} \right\} \text{دس} = \int (\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}} \, \text{دس} - \int (\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}} \, \text{دس}$$

$$= \int (\text{س} + 1)^{\frac{3}{2}} \, \text{د} (\text{س} + 1) - \int (\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}} \, \text{د} (\text{س} + 1)$$

$$= \frac{2}{5} (\text{س} + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} (\text{س} + 1)^{2} + \text{حـ}$$

تمارين ٦ – ١

من تمرين ١ الى ٢٠ جد التكامل غير المحدود وحقق الناتج بايجاد التفاضل

١) $\int (\text{٣س} - ٢)^{٥} \, \text{دس}$

٢) $\int (\text{٢س} + ٥)^{٤} \, \text{دس}$

٣) $\int (٢ - \text{س})^{٤} \, \text{دس}$

٤) $\int (٤ - \text{٦س})^{-٧} \, \text{دس}$

٥) $\int (\text{٢س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \, \text{دس}$

٦) $\int (\text{٢س}^{٢} + ٣)^{٤} \, \text{س دس}$

٧) $\int (\text{٢س}^{٢} + ٣)^{\frac{٢}{٣}} \, \text{س دس}$

٨) $\int (٤ - \text{س}^{٢})^{٣} \, \text{س دس}$

٩) $\int (٤ - \text{٢س}^{٢})^{-\frac{٢}{٣}} \, \text{س دس}$

١٠) $\int \frac{\text{س دس}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

١١) $\int \text{س} \sqrt{\text{٢س}^{٢} - ١} \, \text{دس}$

١٢) $\int \frac{\text{س دس}}{(\text{٣س}^{٢} + ٢)^{٢}}$

١٣) $\int \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ١} \, \text{دس}$

١٤) $\int \text{ل}^{٣} \sqrt{\text{ل}^{٤} + ١} \, \text{دل}$

١٥) $\int \frac{(\text{س}^{٢} + \text{٢س}) \, \text{دس}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + \text{٣س}^{٢} + ١}}$

١٦) $\int \left(١ + \frac{١}{\text{ن}}\right)^{٢} \frac{\text{دن}}{\text{ن}^{٢}}$

١٧) $\int (\text{س}^{٣} + ١)^{٣} \, \text{س}^{٢} \, \text{دس}$

١٨) $\int (\text{٢س}^{٢} - ٣)^{\frac{٤}{٣}} \, \text{س دس}$

١٩) $\int (\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{٢}{٩}} \, \text{س}^{٤} \, \text{دس}$

٢٠) $\int (\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ١)^{\frac{٢}{٣}} \, \text{دس}$

بند ٦ – ٢ تطبيقات على التكامل غير المحدود

اولا – التفسير الهندسي لمسالة تعيين التطبيق الاصلي :–

سبق وان درسنا في الفصل الخامس ان ميل المماس لمنحني بيان التطبيق يساوى المشتقة الاولى للمنحني عند النقطة (س ، ص) الواقعة على هذا المنحنى وفي هذا الفصل سندرس المسالة المعاكسة اى تعيين منحنى بيان التطبيق الاصلي او كما يقال

المنحني التكاملي ص = ع (س) ...(١)

اى تعيين ذلك المنحني الذى ميل مماسه $\bar{\text{ص}}$ = ق (س) ∀ س ∈ المنطلق ...(٢)

فاذا استطعنا انشاء منحن تكاملي مثل هذا فعندئذ يكون لجميع المنحنيات التي تنشأ عن هذا المنحني بانسحاب مواز للمحور الثاني بمسافة كيفية ، مماسات متوازية من اجل القيم نفسها لـ (س) وميل هذه المماسات هو كما في المنحني الاصلي $\bar{\text{ص}}$ = ق (س) ويكافيء هذا الانسحاب المتوازى اضافة حـ لتراتيب المنحني وبذلك تكون المعادلة العامة للمنحنيات الممثلة لحلول المسالة هي :–

ص = ع (س) + حـ ....(٣)

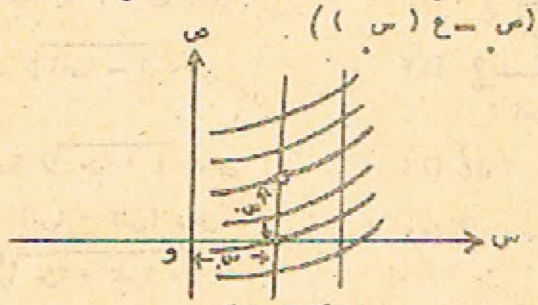
وحتى نستطيع تعيين المنحني التكاملي المطلوب تماما يجب ان نعطي سلفا موضـــع نقطة من المنحني التكاملي كان نعطي مثلا نقطة تقاطع هذا المنحني مع مستقيم مواز لمحور التراتيب (س = س٠) ان هذا التحديد يكافئ اعطاء القيمة الابتدائية ص٠ للتطبيق ص = ع (س).

وبتعويض القيمة الابتدائية هذه في المعادلة (٣) نحصل على المعادلة التي تعيـــن قيمة الثابت حـ .

اى ص٠ = ع (س٠) + حـ

وبذلك يكون التطبيق الاصلي الذى يحقق الشرط الابتدائي المفروض من الشكل .

ص = ع (س) + (ص٠ ـــ ع (س٠))



(شكل ٦ــ١)

امثلـــة محلولـــــة

١) جد معادلة المنحني الذى ميله عند النقطة (س ، ص) هو ٢س٢ ــ ٦س ويمـــر بالنقطة (٣ ، ١)

الحل) ق َ (س) = ٢س٢ ــ ٦س

ق َ (س) د س = (٢س٢ ــ ٦س) د س

∴ ∫ ق َ (س) د س = ∫ (٢س٢ ــ ٦س) د س

$$ق(س) + حـ_١ = \frac{٢}{٣}س^٣ - \frac{٦}{٢}س^٢ + حـ_٢$$

$$∴ ق(س) = \frac{٢}{٣}س^٣ - ٣س^٢ + حـ_٢ - حـ_١$$

$$ق(س) = \frac{٢}{٣}س^٣ - ٣س^٢ + حـ \quad (\text{بفرض ان } حـ_٢ - حـ_١ = حـ)$$

وبما ان المنحني يمر بالنقطة (٣ ، ١)

∴ هذه النقطة تحقق معادلته

$$\text{اي } ق(٣) = ١ \Longleftrightarrow \frac{٢}{٣} \times ٢٧ - ٣ \times ٩ + حـ = ١$$

⟸⟹ ١٨ ــ ٢٧ + حـ = ١ ⟸⟹ ــ ٩ + حـ = ١ ⟸⟹ حـ = ١٠

∴ ق (س) = $\frac{٢}{٣}$ س٣ ــ ٣س٢ + ١٠

مثال ٢) ليكن ق تطبيقا عدديا مشتقته الاولى بالنسبة الى س تساوى ٢س ــ ٢ واصغر قيمة محلية له = ــ ٤ نجد بيان هذا التطبيق ٠

الحل) قَ (س) = ٢س ــ ٢

قَ (س) د س = (٢س ــ ٢) د س

∫ قَ (س) د س = ∫ (٢س ــ ٢) د س

ق (س) = س٢ ــ ٢س + حـ ٠٠٠٠٠٠ (١)

بما ان للتطبيق اصغر قيمة محلية = ــ ٤

∴ قَ (س) = ٢س ــ ٢

قَ (س) ــــ ــــ ــــ ــــ | ++++

متناقص   متزايد

يكون موجبا ∀ س > ١ وسالبا ∀ س < ١

ويساوى صفر عند س = ١

اى النقطة الحرجة عند س = ١ ومنها نستنتج ان للتطبيق اصغر قيمة محلية عند النقطة (١ ، ــ ٤)

وبما ان هذه النقطة تحقق معادلة المنحني ٠

∴ ق (١) = ــ ٤ ⟸⟹ ١ ــ ٢ + حـ = ــ ٤ ⟸⟹ حـ = ــ ٣

∴ معادلة المنحني هي ق (س) = س٢ ــ ٢س ــ ٣

مثال ٣) منحن يمر بالنقطتين (ــ ١ ، ٩) ، (٢ ، ــ ٣) وميله عند اية نقطة عليه يساوى أس ــ ٥ حيث أ ∈ ح جد (١) قيمة أ (٢) معادلة المنحني (٣) معادلة كل من المماس والعمودى عليه عند النقطة التي احداثيها السيني = ٣

الحل) قَ (س) = أس ــ ٥

قَ (س) د س = (أس ــ ٥) د س

∫ قَ (س) د س = ∫ (أس ــ ٥) د س

ق (س) = $\frac{١}{٢}$ أس٢ ــ ٥س + حـ

المنحني يمر بالنقطة (ــ ١ ، ٩) فهي تحقق معادلته

اى ق (ــ ١) = ٩ ⟸⟹ ٩ = $\frac{١}{٢}$ أ + ٥ + حـ

⟸⟹ ٤ = $\frac{١}{٢}$ أ + حـ ٠٠٠٠ (١)

وبما ان المنحني يمر بالنقطة (٢ ، ــ ٣) ∴ ق (٢) = ــ ٣

---

(١) حذفنا الثابت الاختياري من الطرف الايمن وذلك يعتبر ضمنيا انه موجود وليكن حـ$_{١}$ والثابت في الطرف الايسر وليكن حـ$_{٢}$ وباضافة ـ حـ$_{١}$ الى الطرفين يصبح الثابت في الجهة اليسرى حـ$_{٢}$ ـ حـ$_{١}$ = حـ

⟸ ٢ أ + حـ = ٧ ....(٢)

وبحل المعادلتين (١) و (٢) انيا نحصل على ان أ = ٢ ، حـ = ٣

∴ معادلة المنحني هي

ق (س) = س^{٢} ـ ٥س + ٣

ولايجاد معادلة المماس والعمود عليه عند س = ٣

ق (٣) = ـ٣

∴ نقطة التماس هي (٣ ، ـ٣)

قَ (٣) = ٦ ـ ٥ = ١ ميل المماس

∴ معادلة المماس : ص + ٣ = ١ (س ـ ٣) ومنها ص ـ س + ٦ = ٠

ميل العمود = ـ ١

∴ معادلة العمود : ص + ٣ = ـ (س ـ ٣)

اى ص + س = ٠

مثال ٤) اذا كان قً (س) = ٤س و قَ (صفر) = صفر وان ق (صفر) = ٢ = نجد كلا من قَ (س) ، ق (س)

الحل)

قً (س) = ٤س

قً (س) د س = ٤س د س

∫ قً (س) د س = ∫ ٤س د س

قَ (س) = $\frac{٤س^{٢}}{٢}$ + حـ

قَ (س) = ٢س^{٢} + حـ

وبما ان قَ (صفر) = صفر

∴ صفر = ٢ × صفر + حـ

∴ حـ = ٠

∴ قَ (س) = ٢س^{٢}

قَ (س) د س = ٢س^{٢} د س

∫ قَ (س) د س = ∫ ٢س^{٢} د س

ق (س) = $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + ك

وبما ان ق (صفر) = ٢ ∴ ٢ = $\frac{٢}{٣}$ × صفر + ك

اى ك = ٢

∴ ق (س) = $\frac{٢}{٣}$ س٣ + ٢

تماريــــن ٦ـ٢

١) اذا كان ق′ (س) = س٢ (س ـ $\frac{٣}{س}$)٢ ، حيث س ≠ صفر فجد ق(١) علما بان (صفر، ٢) ∈ ق

٢) اذا كان ق′ (س) = س(٣س ـ ٢) فاثبت ان ق (س) = س٣ ـ س٢ ـ ٩ اذا علمت ان ق (٢) = ـ ٥

٣) ليكن $\frac{دق}{دس}$ = ٢س + ١

فاذا علمت ان (١ ، أ + ٢) ∈ ق ٨ (٣ ، ٣أ + ٢) ∈ ق فما قيمة أ ؟

٤) اذا علم ان ق″ (س) = ٦س وكان $\left.\frac{دق}{دس}\right|_{س=١}$ = ٣

وان (١ ، ٤) ∈ ق فاثبت ان ق (س) = س٣ + ٣

٥) جد اعظم قيمة محليا واصغر قيمة محليا للمنحني الذى ميله عند نقطة عليه يســـاوى ٣(س٢ ـ ٢س ـ ٣) مع العلم انه يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

٦) اذا كان ق″(س) = ٦ (س ـ ٢)٢ وكانت ق (٢) = صفر فاثبت ان ق (ـ ١) = ـ ٥٤

٧) اذا كان ميل المماس للمنحني عند اية نقطة (س ، ص) على المنحني يســـاوى ٦س٢ ـ ٣٠س + ٣٦ فجد معادلة المنحني اذا علمت ان اعظم قيمة محليـــــة له = ٢٨ كذلك جد اصغر قيمة محليـة ٠

٨) منحن يمر بالنقطة (٠ ، ١) وميله يساوى ٢س ـ ½ س٢ لجميع قيم س ٠ جـــد معادلة كل من المماس والعمود عليه عند النقطة التي احداثيها السيني = ٢

٩★) ليكن ق: ح ⟵ ح تطبيقا وليكن ل: ح ⟵ ح تطبيقا بحيث ان ∀(س ، ص) ∈ ق و ∀(س ، ص) ∈ ل فان ق′ (س) = ٤س ، ل′ (س) = ٣س٢ + ١ وكانت نقطة الاصل ∈ ل ∩ ق ٠ برهن ان ل يمـــس ق واذا كان المستقيم المماس والعمود عليه من نقطة التماس يصنعان مثلثا مع المحور الاول ٠ جد مساحة هذا المثلث

* ١٠) ليكن ل : ح ← ح تطبيقا بحيث ان ل″ (س) = ١٢س٢ – ٢٤س
٢س ∋ ح فاذا كانت (٢ ، –١٦) ∋ ق و (٣ ، –٢٧) ∋ ق فجد
ل (٤) ومثل ل ديكارتيا .

ثانيا – التفسير الفيزياوى للتكامل غير المحدود

لنفرض ان لدينا القانون الذى يعطي الارتباط التحليلي للسرعة بدلالة الزمن (ن)

س = ق (ن)

وليكن المطلوب البحث عن علاقة المسافة م بالزمن

ولما كانت السرعة على مسار مفروض مساوية لمشتق المسافة بالنسبة للزمن دم/دن فان

المسالة تؤول الى تعيين التطبيق الاصلي .

م = ∫ ق (ن) دن

وبذلك نحصل على مجموعة غير منتهية من حلول لاتختلف عن بعضها الا بثابت اضافي .
ويعود عدم التعيين هنا الى عدم تحديد الموضع الذى تقاس ابتداء منه ، المسافة
م ، فاذا كان لدينا على سبيل المثال س = حـ ن + س١ (الحركة بسرعة منتظمة)

فعندئذ تعطى م بالعبارة الاتية :–

م = ½ حـ ن٢ + س١ ن + د ..... (١)

وذلك لان مشتق هذه العبارة بالنسبة للزمن
يتكافأ مع العبارة المفروضة س = حـ ن + س١

واذا اتفقنا على ان نقيس م بدءا من النقطة الموافقة للقيمة ن = صفر ، اى اذا
افترضنا م = صفر عندما ن = صفر ، فعندئذ يجب ان نعوض في العلاقة (١)
عن د بالصفر

امثلــة محلولــة

١) بدأت نقطة مادية حركتها بسرعة ١٥ سم / ثا في خط مستقيم ابتداء من نقطــة
الاصل فبلغ تعجيلها ٦(٢ – ن) سم/ثا٢ . بعد ن ثانية . أثبت ان سرعتهــا
تصبح صفر عندما تكون على بعد (١) متر من نقطة الاصل وان سرعتها لاتزيد عــن
٢٧ سم/ثا

الحل) تَ(ن) = سَ(ن) = ١٢ – ٦ن بالفرض
سَ(ن) دن = (١٢ – ٦ ن) دن
∫سَ(ن) دن = ∫ (١٢ – ٦ ن) دن
س(ن) = ١٢ن – ٣ن٢ + حـ حيث حـ ثابت اختيارى

عندما ن = صفر فان س(٠) = ١٥ بالفرض

∴ ١٥ = ١٢ × صفر ـ ٣ × صفر + حـ

∴ حـ = ١٥

∴ س(ن) = ١٢ ن ـ ٣ن٢ + ١٥ ....(١)

م̄ = س(ن) = ١٢ ن ـ ٣ن٢ + ١٥

م̄(ن) د ن = (١٢ن ـ ٣ن٢ + ١٥) د ن

∫ م̄ (ن) د ن = ∫ (١٢ ن ـ ٣ن٢ + ١٥) د ن

م(ن) = ٦ن٢ ـ ن٣ + ١٥ن + حـ

وبوضع ن = صفر ، م = ٠ فان حـ = صفر ، وتكون م = ٦ن٢ ـ ن٣ + ١٥ن ..(٢)

واذا كانت السرعة = صفر فان

١٢ن ـ ٣ن٢ + ١٥ = ٠

ن٢ ـ ٤ن ـ ٥ = ٠

(ن ـ ٥) (ن + ١) = ٠

∴ ن = ٥ ثا وبالتعويض في (٢) عن قيمة ن = ٥ ينتج

م = ٦ × ٢٥ = ١٢٥ + ١٥ × ٥ = ١٠٠ سم

ولايجاد اقصى سرعة لها نجد س̈ = ١٢ ـ ٦ن ومنها

س̈(ن) < صفر ∀ن > ٢

و س̈ (ن) > صفر ∀ن < ٢

و س̈ (٢) = صفر

∴ توجد اصغر قيمة محلية وهي س(٢) = ٢٧سم/ ثا

مثال ٢) جسم يتحرك في خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره ٢ ق/ ثا فاذا بلغت سرعته في نهاية ٤ ثوان من بدء الحركة ١٤ ق/ ثا كما ان بعده عن نقطة الحركة عند ئذ تساوى ٤٩ قدما احسب

آ) سرعة الجسم في اية لحظة ن ب) سرعة الجسم في نهاية ٦ ثوان

جـ) بعد الجسم عن النقطة الثابتة بدلالة ن د) بعد الجسم عن النقطة الثابتة في نهاية الثانية الثامنة .

الحل)

آ) ت(ن) = ٢

س̈(ن) د ن = ٢ د ن

∫ س̈(ن) د ن = ٢ ∫ د ن

س(ن) = ٢ن + حـ

١٤ = ٢ × ٤ + حـ

∴ حـ = ٦

∴ س(ن) = ٢ن + ٦ ق/ ثا

ب) س(٦) = ٢ × ٦ + ٦ = ١٨ق/ ثا

جـ) س(ن) = ٢ن + ٦

مَ(ن) = ٢ن + ٦

∫ مَ(ن) د ن = ∫ (٢ن + ٦) دن

م(ن) = ن^{٢} + ٦ن + ك

٤٩ = ١٦ + ٢٤ + ك

∴ ك = ٩

∴ م(ن) = ن^{٢} + ٦ن + ٩

د) م (٨) = ٦٤ + ٦ × ٨ + ٩ = ١١٩ قدم

تمارين ٦ ــ ٣

(١) نقطة مادية بدات تتحرك من السكون بتعجيل قدره (٢ + ٣ ن) م/ ثا^{٢} وعندما ن = صفر فان النقطة يكون على بعد ٥ م من نقطة الابتداء • وبعد ن = ١ تصبح سرعة النقطة ١٠م/ ثا اين تكون بعد ن ثا ؟

(٢) نقطة مادية بدأت من السكون بتعجيل قدره (٣٠ ــ ٦ن م/ ثا بزمن ن اين ومتى تقف ثانيـة •

(٣) تقذفت كرة راسيا الى اعلى من نقطة على سطح الارض بسرعة ابتدائيـة قدرهـــا ٩٦ ق/ ثا • جد باستخدام التكامل •

١) السرعة والمسافة عند اى لحظة ٢) اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة

بند ٦ ــ ٤ ° التكامل المحـدود °

تعريف / سبق ان عرفنا التكامل غير المحدود بانه العملية العكسية للتفاضل كما اوضحنا في بند ٦ ــ ١ وفي كل من عمليات التكامل كنا نضيف ثابتا للتكامل حـ وذلك لتكون نتيجة التكامل شاملة لجميع التطبيقات الممكنة فاذا فرضنا ان

∫ ق (س) د س = ل (س) + حـ • • • • • (١)

فان الطرف الايمن لهذه المعادلة لايتعين تعيينا كاملا الا اذا عرفنا قيمة الثابـت حـ • وهذه تتوقف على ظروف اضافية في المسالة • بينما قيمة التكامل عند (س = أ) هي من التعويض في المعادلة (١)

ل (أ) + حـ - - - - - - - (٢)

وكذلك فانه قيمة التكامل عند (س = ب) هي

ل (ب) + حـ • • • • • (٣)

وعلى هذا نفرق قيمتي التكامل عند (س = أ) و (س = ب) ينتج بطرح القيمـــة (٢) من القيمة (٣) اى

ل (ب) ــ ل (أ) ....(٤)

يلاحظ ان القيمتين (٢) و (٣) غير معينتين لوجود الثابت حـ بينما فـرق القيمتين (٤) معين (اى عدد حقيقي) نستنتج اذن ان قيمة التكامل عند اى قيمة معينة للمتغير س لاتكون معينة اما الفرق بين قيمتي التكامل المناظرتين لاى قيمتين للمتغير س يكون معينا ويرمز لهذا الفرق بالرمز

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ})$$

ويقرا تكامل ق (س) بالنسبة الى س مابين النهايتين أ ، ب ويسمى بالتكامـل المحدود . بشرط ق: [أ ، ب] ⟵ ح مستمر

وعملية ايجاد التكامل هذا تسمى بالتكامل بين حدين أ ، ب وتسمى أ بالحـد الادنى للتكامل وتسمى ب بالحد الاعلى للتكامل .

بند ٦ ــ ٥ خواص التكامل المحدود

اولا ــ اذا بادلنا بين موضعي الحدين الاعلى والادنى لتكامل محدود فعندئذ لاتتغير سوى اشارة التكامل . فالتكامل اذن يحافظ على قيمته المطلقة

اى $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س}$$

ثانيا ــ تقسيم حدود التكامل

اذا كان ق : [أ ، هـ] ⟵ ح مستمر فان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} + \int_{\text{ب}}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = \int_{\text{أ}}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س}$$

ثالثا ــ ان كل تكامل محدود حده الاعلى مساو لحده الادنى يساوى صفر

اى $$\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = \text{صفر}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د س} = \text{ب} - \text{أ}$$ وذلك لان التطبيق المكامل يساوى الواحد بالنسبـة الـى جميع قيم س وبالتالي فان $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{٠}}\ \text{د س} = \Big[\text{س}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ب} - \text{أ}$$

خامسا ــ لاتتعلق قيمة التكامل المحدود بالرمز الذى نختاره لمتغير التكامل .

اى $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{ن})\ \text{د ن}$$

سادسا ــ يمكن اخراج العامل الثابت خارج رمز التكامل المحدد

اى $$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{حـ ق}(\text{س})\ \text{د س} = \text{حـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س}$$

سابعاً — التكامل المحدود لمجموع جبرى يساوى المجموع الجبرى للتكاملات المحدودة

أى $\int_{أ}^{ب} (ق_{١} \oplus ق_{٢} \ominus ق_{٣} \oplus \cdots)\, دس = \int_{أ}^{ب} ق_{١}\, دس + \int_{أ}^{ب} ق_{٢}\, دس - \int_{أ}^{ب} ق_{٣}\, دس + \cdots$

امثلــة محلولــة

١) $\int_{١}^{ب} حـ\, دس = حـ\, س \Big]_{١}^{ب} = حـ\,(ب - ١)$

٢) $\int_{٠}^{٥} س\, دس = \frac{١}{٢} س^{٢} \Big]_{٠}^{٥} = \frac{١}{٢}(٢٥ - ٠) = \frac{٢٥}{٢}$

٣) $\int_{١}^{٣} س^{٣}\, دس = \frac{١}{٤} س^{٤} \Big]_{١}^{٣} = \frac{١}{٤}(٨١ - ١) = ٢٠$

٤) $\int_{-١}^{١} (٢س^{٢} - س^{٣})\, دس = \frac{٢}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٤} س^{٤} \Big]_{-١}^{١} = \left(\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٤}\right) - \left(\frac{-٢}{٣} - \frac{١}{٤}\right)$

$= \frac{٤}{٣}$

٥) $\int_{-٣}^{-١} \left(\frac{-١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}\right) دس = \frac{١}{س} + \frac{١}{٢س^{٢}} \Big]_{-٣}^{-١}$

$= (١ + \frac{١}{٢}) - \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{١٨}\right) = \frac{١٠}{٩}$

٦) $\int_{١}^{٤} \frac{دس}{\sqrt{س}} = ٢\sqrt{س} \Big]_{١}^{٤} = ٢(\sqrt{٤} - ١) = ٢$

٧) $\int_{١}^{٢} \left(\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}\right) دس = \int_{١}^{٢} (س - س^{-٢})\, دس = \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{س} \Big]_{١}^{٢}$

$= \left(\frac{٤}{٢} + \frac{١}{٢}\right) - \left(\frac{١}{٢} + ١\right) = ١$

٨) $\int_{١}^{٢} س^{٢}\left(١ - \frac{٢}{س^{٤}}\right) دس = \int_{١}^{٢} (س^{٢} - ٢س^{-٢})\, دس = \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٢}{س} \Big]_{١}^{٢}$

$= \left(\frac{١}{٣} \times ٨ + ١\right) - \left(\frac{١}{٣} + ٢\right) = \frac{١١}{٣} - \frac{٧}{٣} = \frac{٤}{٣}$

٩) $\int_{-١}^{١} س(١ + س^{٣})\, دس = \int_{-١}^{١} (س + س^{٤})\, دس = \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{٥} س^{٥} \Big]_{-١}^{١} =$

$= \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥}\right) - \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٥}\right) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٥} = \frac{٢}{٥}$

١٠) $\int_{صفر}^{١} س(س - ١)(س - ٢)\, دس = \int_{صفر}^{١} (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س)\, دس =$

$$\frac{١}{٢}\left[س^{٤} - س^{٣} + س^{٢}\right]_{\text{صفر}}^{-١} = \frac{١}{٢}(١ + ١ + ١) - \text{صفر} = ١\frac{١}{٢}$$

(11) $\int_{١}^{٢}(س+١)(س^{٢}+٢س+٢)^{\frac{١}{٣}}\,دس = \frac{١}{٢}\int_{١}^{٢}(س^{٢}+٢س+٢)^{\frac{١}{٣}}\,٢(س+١)\,دس$

$$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٢}(س^{٢}+٢س+٢)^{\frac{١}{٣}}\,د(س^{٢}+٢س+٢) = \frac{١}{٢}\times\left[\frac{(س^{٢}+٢س+٢)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{٣}{٨}\left[(س^{٢}+٢س+٢)^{\frac{٤}{٣}}\right]_{١}^{٢} = \frac{٣}{٨}\left\{(٤+٤+٢)^{\frac{٤}{٣}} - (١+٢+٢)^{\frac{٤}{٣}}\right\}$$

$$= \frac{٣}{٨}\left\{١٠^{\frac{٤}{٣}} - ٥^{\frac{٤}{٣}}\right\} = \frac{٣}{٨}\left(\sqrt[٣]{١٠^{٤}} - \sqrt[٣]{٥^{٤}}\right)$$

(12) $\int_{-٢}^{\text{صفر}} س\sqrt{٢س^{٢}+١}\,دس = \frac{١}{٤}\int_{-٢}^{\text{صفر}}(٢س^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}}\times ٤س\,دس$

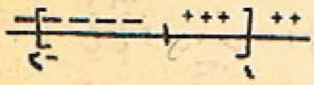
$$= \frac{١}{٤}\int_{-٢}^{\text{صفر}}(٢س^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}}\,د(٢س^{٢}+١) = \frac{١}{٤}\times\frac{٢}{٣}\left[(٢س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-٢}^{\text{صفر}}$$

$$= \frac{١}{٦}\left[(٢س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-٢}^{\text{صفر}} = \frac{١}{٦}\left\{(٢\times٠+١)^{\frac{٣}{٢}} - (٢\times٤+١)^{\frac{٣}{٢}}\right\}$$

$$= \frac{١}{٦}\left\{١ - ٩^{\frac{٣}{٢}}\right\} = \frac{-٢٦}{٦} = \frac{-١٣}{٣}$$

(13) $\int_{-٢}^{٤}|٣س-٦|\,دس$

اشارة ٣س − ٦



نلاحظ من المخطط المجاور

ان $|٣س-٦| = ٣س - ٦ \quad \forall\, س \in [٢ ، ٤]$

وان $|٣س-٦| = ٦ - ٣س \quad \forall\, س \in [-٢ ، ٢[$

$$\therefore \int_{-٢}^{٤}|٣س-٦|\,دس = \int_{-٢}^{٢}(٦-٣س)\,دس + \int_{٢}^{٤}(٣س-٦)\,دس$$

$$= \frac{١}{٣}\int_{٢}^{٤}(٣س-٦)\,٣دس - \frac{١}{٣}\int_{-٢}^{٢}(٦-٣س)(-٣دس)$$

$$= \frac{١}{٣}\int_{٢}^{٤}(٣س-٦)\,د(٣س-٦) - \frac{١}{٣}\int_{-٢}^{٢}(٦-٣س)\,د(٦-٣س)$$

$$= \frac{١}{٣}\times\frac{١}{٢}\left[(٣س-٦)^{٢}\right]_{٢}^{٤} - \frac{١}{٣}\times\frac{١}{٢}\left[(٦-٣س)^{٢}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= ٦ - \frac{١}{٦}\left[(\text{صفر}) - (١٢)^{٢}\right] = ٦ - \frac{١}{٦}\times\left(-(١٢)^{٢}\right) = ٣٠$$

١٤) احسب قيمة $\int_{-3}^{3} |3س^2 - 12| \, دس$

$3س^2 - 12 = 3(س^2 - 4) = 3(س - 2)(س + 2)$

	-3 إلى -2	-2 إلى 2	2 إلى 3
$س + 2$	$- - -$	$+ + +$	$+ +$
$3(س - 2)$	$- - -$	$- - -$	$+ +$
$3(س^2 - 4)$	$+ + +$	$- - -$	$+ +$

$$\therefore \int_{-3}^{3} |3س^2 - 12| \, دس = \int_{-3}^{-2} (3س^2 - 12) \, دس + \int_{-2}^{2} (12 - 3س^2) \, دس + \int_{2}^{3} (3س^2 - 12) \, دس = \Big[س^3 - 12س\Big]_{-3}^{-2} - \Big[(س^3 - 12س)\Big]_{-2}^{2} + \Big[(س^3 - 12س)\Big]_{2}^{3}$$

$$= \{(-8 + 24) - (-27 + 36)\} - \{(8 - 24) - (-8 + 24)\} + \{(27 - 36) - (8 - 24)\} = 7 + 32 + 7 = 46$$

١٥) $\int_{-1}^{2} \int_{س^2}^{س+2} دص \, دس = \int_{-1}^{2} \Big[ص\Big]_{س^2}^{س+2} \, دس = \int_{-1}^{2} (س + 2 - س^2) \, دس = \frac{9}{2}$

١٦) $\int_{-1}^{2} \int_{س^2}^{س+2} ح س^2 \, دص \, دس = ح \int_{-1}^{2} \int_{س^2}^{س+2} س^2 \, دص \, دس$

$= ح \int_{-1}^{2} \Big[س^2 ص\Big]_{س^2}^{س+2} \, دس = ح \int_{-1}^{2} (س^3 + 2س^2 - س^4) \, دس = \frac{63}{20} ح$

١٧) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{س} (س + ص + 1) \, دص \, دس$

١) نجد $\int_{0}^{س} (س + ص + 1) \, دص$ على فرض س كمية ثابتة

$= \Big[س ص + \tfrac{1}{2} ص^2 + ص\Big]_{0}^{س} = \frac{3س^2}{2} + س$

٢) نجد $\int_{0}^{1} \left(\frac{3س^2}{2} + س\right) \, دس = \Big[\frac{3س^3}{2 \times 3} + \tfrac{1}{2} س^2\Big]_{0}^{1} =$

$\tfrac{1}{2} \Big[س^3 + س^2\Big]_{0}^{1} = \tfrac{1}{2} \times 2 = 1$

١٨) $\int_{0}^{2} \left\{ \int_{-1}^{ع} \left[\int_{0}^{ص} 12س \, دس \right] دص \right\} دع =$

١) نجد $\int_{0}^{ص} 12س \, دس = \Big[\frac{12س^2}{2}\Big]_{0}^{ص} = \Big[6س^2\Big]_{0}^{ص} = 6ص^2$

٢) نجد $\int_{-1}^{ع} 6ص^2 \, دص = \Big[\frac{6ص^3}{3}\Big]_{-1}^{ع} = \Big[2ص^3\Big]_{-1}^{ع} = 2ع^3 + 2$

٣) نجد $\int_{0}^{2} (2ع^3 + 2) \, دع = \Big[\frac{2ع^4}{4} + 2ع\Big]_{0}^{2} = \Big[\tfrac{1}{2} ع^4 + 2ع\Big]_{0}^{2}$

= (٢ × ٣ + ٨١ × ½) − (٢ × ٢ + ١٦ × ½) = ($\frac{٨١}{٢}$ + ٦) − (٨ + ٤)

= $\frac{٨١}{٢}$ + ٦ − ١٢ = $\frac{٨١}{٢}$ − ٦ = ٣٤٫٥

١٩) $\int_{١}^{٢}$ (٣س٢ + [س + ٢]) دس

نحن نعلم من الفصل الثاني انه ∀ س ∈ [١ ، ٢ [فان [س + ٢] = ٣

∴ $\int_{١}^{٢}$ (٣س٢ + [س + ٤]) دس = $\int_{١}^{٢}$ (٣س٢ + ٣) دس = [س٣ + ٣س]$_{١}^{٢}$

= (٨ + ٦) − (١ + ٣) = ١٠

٢٠) ليكن ق : [٠ ، ٣] ⟵ ح بحيث

ق(س) = { $\frac{س}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ∀ س ∈ [٠ ، ٢ [؛ س ∀ س ∈ [٢ ، ٣] }

فجد $\int^{٣}$ ق (س) دس

الحل) ان التطبيق غير مستمر عند س = ٢ ولكن تطبيقه الاصلي مستمر ∀ س ∈ [٠ ، ٣]

اى ع (س) = $\frac{س٢}{٤}$ + $\frac{س}{٢}$ ∀ س ∈ [٠ ، ٢ [

و ع (س) = $\frac{س٢}{٢}$ ∀ س ∈ [٢ ، ٣]

ولايجاد التكامل المحدود لمثل هذه التطبيقات نتبع مايلي :−

ليكن ق : [أ ، ب] ⟵ ح تطبيق مستمر ∀ س ∈ [أ ، ب] / { حـ }

وان $\int$ ق (س) دس مستمر ∀ س ∈ [أ ، ب] فان

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = غـا$_{و ← ٠}$ $\int_{أ}^{حـ − و}$ ق (س) دس + غـا$_{و ← ٠}$ $\int_{حـ + و}^{ب}$ ق (س) دس

وبما ان $\int$ ق (س) دس = ع (س) + حـ مستمرا ∀ س ∈ [أ ، ب]

∴ غـا$_{و ← ٠}$ $\int_{أ}^{حـ − و}$ ق (س) دس = غـا$_{و ← ٠}$ (ع (س)]$_{أ}^{حـ − و}$ = غـا$_{و ← ٠}$ [ع (حـ − و) −

ع (أ)]

وان غـا$_{و ← ٠}$ $\int_{حـ + و}^{ب}$ ق (س) دس = غـا$_{و ← ٠}$ ع (س)]$_{حـ + و}^{ب}$ = غـا$_{و ← ٠}$ [ع (ب) − ع (حـ + و)]

∴ $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) دس = غـا$_{و ← ٠}$ ع (حـ − و) − غـا$_{و ← ٠}$ ع (أ) + غـا$_{و ← ٠}$ ع (ب) −

غـا$_{و ← ٠}$ ع (حـ + و)

وبما ان ع مستمر $\therefore \lim_{\text{و} \to \cdot} \text{ع}(\text{حـ} - \text{و}) = \lim_{\text{و} \to \cdot} \text{ع}(\text{حـ} + \text{و})$

$$\therefore \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \left(\text{ع(ب)} - \text{ع(حـ)}\right) + \left(\text{ع(حـ)} - \text{ع(أ)}\right)$$

اي في حالة انقطاع التطبيق المكامل في نقطة حـ فان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$ يبقى صحيحا مادام التطبيق الاصلي مستمرا في [أ ، ب]

$$\therefore \int \text{ق(س) دس} = \int_{١}^{٢} \left(\frac{\text{س}}{٢} + \tfrac{١}{٢}\right) \text{دس} + \int_{٢}^{٣} \text{س دس} = \left[\frac{\text{س}^٢}{٤} + \frac{\text{س}}{٢}\right]_{١}^{٢} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٢}^{٣}$$

$$= ٥ + \frac{٩}{٢} - ٢ = \frac{١٥}{٢}$$

مثال) جد $\int_{-١}^{١} \text{س}^{-\frac{٢}{٣}} \text{دس}$

الحل) ان التطبيق ق (س) $= \text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$ تصبح قيمته غير محددة عند س = صفر لكن تطبيقه الاصلي $٣\text{س}^{\frac{١}{٣}}$ يبقى مستمرا عند هذه القيمة لـ س وبذلك يمكننا ان نكتب :

$$\int_{-١}^{١} \text{س}^{-\frac{٢}{٣}} \text{دس} = \left[٣\text{س}^{\frac{١}{٣}}\right]_{-١}^{٠} + \left[٣\text{س}^{\frac{١}{٣}}\right]_{٠}^{١} = ٦$$

تمارين ٦ ـ ٤

١) اذا كان ق : ح / $\left\{\frac{-٢}{٣}\right\} \longrightarrow$ ح بحيث ق(س) $= \frac{٩\text{س}^٢ - ٤}{٣\text{س} + ٢}$ نجد

$$\int_{-٥}^{١} \text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٤} \text{ق(س) دس}$$

٢) برهن ان $\int_{٠}^{١} \left(\int_{-\sqrt{\text{ص}}}^{\text{ص}^٢} \text{دس}\right) \text{دص} = \int_{١}^{٤} \int_{\text{ص}-٢}^{\sqrt{\text{ص}}} \text{دس دص}$

٣) جد $\int_{١}^{٢} \int_{\text{ص}}^{\text{ص}^٢} \text{دس دص}$ ٤) $\int_{٠}^{١} \int_{\sqrt{\text{ص}}}^{١} \text{دس دص}$

٥) $\int_{٠}^{٢} \int_{-\sqrt{٤-\text{ص}^٢}}^{\sqrt{٤-\text{ص}^٢}} \text{ص دس دص}$ ٦) $\int_{-١}^{١} \int_{٢\text{س}^٢-٢}^{٢\text{س}+٤} \text{دص دس}$

٦) ليكن $ق(س) = (س^٢ + ٢)^٣$ اثبت ان $قَ(س) = ٦س(س^٢ + ٢)^٢$

واحسب $\int_{ب}^{أ} ٦س(س^٢ + ٢)^٢ \, دس$

٧) ليكن $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٥}$ اثبت ان $قَ(س) = س(س^٢ + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

واحسب $\int_{٠}^{٢} \frac{س \, دس}{س^٢ + ٥}$

٨) اذا كان $ق : \{س : س \geq -٢\} \longrightarrow ح$ بحيث

$ق(س) = ٦(س + ٢)^{\frac{٣}{٢}}(س^٢ + ١)^{\frac{٤}{٣}}$ اثبت ان

$قَ(س) = (س + ٢)^{\frac{١}{٢}}(س^٢ + ١)^{\frac{١}{٣}}(٢٥س^٢ + ٣٢س + ٩)$

احسب $\int_{٠}^{٢} (س + ٢)^{\frac{١}{٢}}(س^٢ + ١)^{\frac{١}{٣}}(٢٥س^٢ + ٣٢س + ٩) \, دس$

٩) اذا كان $ق(س) = \frac{س + ٣}{س - ٢} \quad \forall س \neq ٢$

اثبت ان $قَ(س) = \frac{-٥}{(س - ٢)^٢}$ واحسب $\int_{-١}^{١} \frac{-٥ \, دس}{(س - ٢)^٢}$

١٠) اذا كان $ق(-س) = -ق(س) \quad \forall س \in ك$ فماذا يمكنك القول عن

$\int_{-ب}^{ب} ق(س) \, دس$ ؟

١١) اذا كان $ق(-س) = ق(س) \quad \forall س \in ك$ فما هي العلاقة بين

$\int_{-ب}^{ب} ق(س) \, دس$ و $\int_{صفر}^{ب} ق(س) \, دس$ ؟

١٢) ليكن ق تطبيق وان $ع(س) = \int_{أ}^{س} ق(ن) \, دن$

وليكن $ل(س) = \int_{ب}^{س} ق(ن) \, دن$ حيث أ ، ب عددين حقيقين معلومين برهن ان ع ، ل مختلفان بكمية ثابتة . ثم جد قيمة هذه الكمية الثابتة .

احسب قيمة التكاملات المحدودة التالية :-

١٣) $\int_{\text{ب}}^{\text{ج}} (٣\text{ن} - ١)^{٢}\, \text{دن}$

١٤) $\int \sqrt{٢ - \text{س}}\; \text{دس}$

١٥) $\int_{-٢}^{-١} \frac{\text{دس}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

١٦) $\int \text{س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\; \cdot \text{دس}$

١٧) $\int \frac{(\text{س}^{٢} + ١)\,\text{دس}}{\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١}$

١٨) $\int_{١}^{٢} (٢\text{س} + ١) \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}\; \text{دس}$

١٩) $\int_{١} \frac{(\text{س}^{\frac{١}{٣}} + ٢)^{٤}\,\text{دس}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

٢٠) $\int_{١}^{٢} (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}} (\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢}})\, \text{دس}$

٢١) $\int (\text{س} - \frac{٣}{\text{س}})$ ؟ $(\frac{١}{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٢}})\, \text{دس}$

٢٢) $\int ((٢\text{س})^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{٢\text{س}}})\, \text{دس}$

٢٣) $\int^{٤} |٢٤\text{س} - ٦\text{س}^{٢}|\; \text{دس}$ ‏ ٦س(٤−س)

٢٤) $\int ([\text{س}] + |٢\text{س} + ٤|)\, \text{دس}$

٢٥) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$

٢٦) $\int (\text{س}^{\text{ه}} - \text{ه}^{\text{س}})\, \text{دس}$

بعض تطبيقات التكامل المحدود

١ـ حساب مساحة سطح :

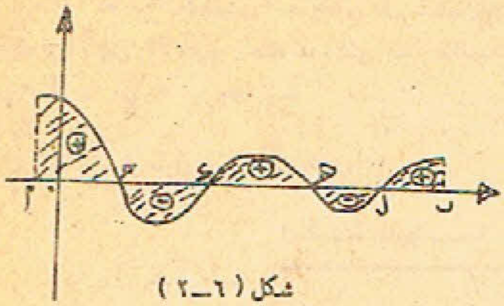
أ) مساحة السطح المحصور بين المنحني ص= ق(س) ومحور السينات

ان مساحة السطح المحصور بين المنحنى ص= ق (س) ومحور السينات والمستقيمين س= أ ، س = ب تقدر بالتكامل المحدود

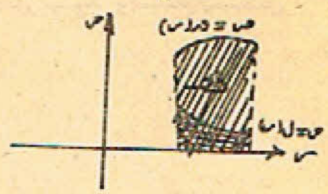
$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\; \text{دس}$$

الا ان المساحة المستخرجة بهذه الطريقة لاتعبر عن المساحة الحقيقية للسطح التي يشكلها المنحني مع محور السينات بل تعبر عن المجموع الجبري لها على اعتبار اشارة كل سطح يقع تحت محور السينات سالبة واذا اردنا للحصول على مجموع مساحات السطوح بالمعنى المألوف فما علينا الا حساب التكامل .

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left| \text{ق}(\text{س}) \right| \text{د س}$$



شكل (٦ـ٢)



شكل (٦ـ٣)

فمجموع مساحات السطوح المخططة كما في الشكل (٦ـ٢) تساوى

$$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} - \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \int_{\text{د}}^{\text{هـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} - \int_{\text{هـ}}^{\text{ل}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \int_{\text{ل}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$$

ب) مساحة السطح المحصور بين منحنين

ان مساحة السطح المحصور بين المنحنين ص = ق (س) ، ص = ل (س) والمستقيمين س = أ ، س = ب تساوى

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})\right) \text{د س}$ في الحالة التي يقع فيها احد المنحنين فوق الاخرى في الحالة التي يكون فيها ق (س) $\geqslant$ ل (س) في الفترة [أ ، ب]

وتساوى $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ل}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\right) \text{د س}$ اذا كان ل (س) $\geqslant$ ق (س) في الفترة [أ ، ب]

ولبرهان ذلك نفرض اولا ان كلا المنحنيين يقع فوق محور السينات فعندئذ يتضح من الشكل (٦ـ٣) مباشرة ان السطح هو يساوى الفرق بين السطحين المحصورين بين المنحنين المفروضين ومحور السينات .

$$\text{هـ} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل}(\text{س})\,\text{د س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})\right) \text{د س}$$

وهو المطلوب

اما الحالة العامة التي يكون فيها للمنحنين وضع كيفي بالنسبة لمحور السينات فانها ترجع الى الحالة السابقة بسحب محور السينات نحو الاسفل بمقدار كاف حتى يقع المنحنيان فوقه وبما ان هذا الانسحاب يضيف لكل من التطبيقين ق(س) ، ل(س) الثابت الاضافي نفسه فان الفرق ق (س) ـ ل (س) يبقى دون ان يطرأ عليه تغيير . هـذا ونترك للقارئ برهان ما يأتي :ـ

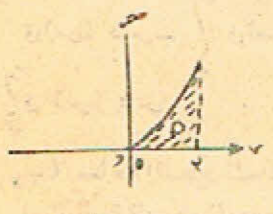
اذا تقاطع المنحنيان المفروضان على شكل يقع احدهما تحت الاخر في بعض الاجزاء وفوقه في الاجزاء الاخرى فعندئذ تكون مساحة السطح المحصور بينهما والمستقيمين س = أ ، س = ب مساوية

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left| \text{ق}(\text{س}) - \text{ل}(\text{س}) \right| \, \text{دس}$$

امثلــة محلولــة

مثال ١) جد المساحة المحددة بين المنحني ص = ½ س٢ والمستقيمين س = ١ ، س = ٣ والمحور الاول

الحل) $\frac{\text{س}^2}{2} \geq$ صفر (خواص الاعداد الحقيقية)



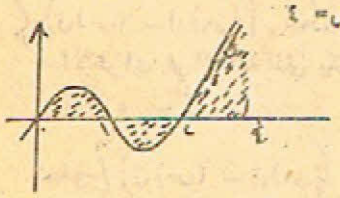
$\therefore$ ق (س) $\geq$ صفر لكل س $\in$ ح

$$\therefore \text{المساحة} = \int_{1}^{3} \frac{\text{س}^2}{2} \, \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^3}{6} \right]_{1}^{3} = \frac{27}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{26}{6} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

(شكل ٦ ـ ٤)

مثال ٢) جد المساحة المحددة بين المنحني ق (س) = س(س ـ ١) (س ـ ٢) والمحور الاول بين المستقيمين س = صفر ، س = ٤



من المخطط الديكارتي للتطبيق نلاحظ ان منحني التطبيق المحصور بين س = ٠ ، س = ١ يقع فوق محور السينات وبين س = ١ ، س = ٢ يقع تحته وبين س = ٢ ، س = ٤ يقع فوقه

(شكل ٦ ـ ٥)

$$\text{ولهذا فالمساحة} = \int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{0}^{1} \text{س}(\text{س}-1)(\text{س}-2)\,\text{دس} - \int_{1}^{2} \text{س}(\text{س}-1)(\text{س}-2)\,\text{دس} + \int_{2}^{4} \text{س}(\text{س}-1)(\text{س}-2)\,\text{دس}$$

$$= \int_{0}^{1} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 - 2\text{س})\,\text{دس} - \int_{1}^{2} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 2\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{4} (\text{س}^3 - 3\text{س}^2 - 2\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}^3 + \text{س}^2\right]^{1} - \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{1}^{2} + \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{2}^{4}$$

= ١٦٫٥ وحدة مربعة

ملاحظة / يمكن معرفة ان المنحني يقع فوق المحور الاول في الفترة [٠ ، ١] لـ [٢ ، ٤] ويقع تحته في [١ ، ٢] وذلك دون اللجوء الى المخطط الديكارتي كما يلي

	(٢ فما فوق)	(١ ، ٢)	(صفر ، ١)	(دون الصفر)
اشارة س	++	++	++	---
اشارة س−١	++	++	--	---
اشارة س−٢	++	---	---	---
اشارة ق(س)	++	---	+++	---

اى ق(س) ≥ صفر

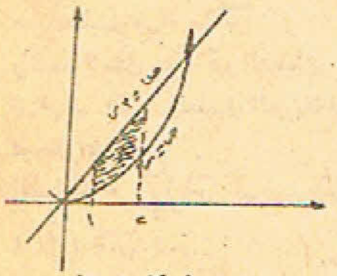
∀ س ∈ [٠ ، ١] ∪ [٢ ، ٤]

و ق(س) ≤ صفر

∀ س ∈ [١ ، ٢]

مثال ٣) جد مساحة المنطقة المحددة بين المستقيمات ص = ٣س ، س = ١ ، س = ٢ والمنحني ص = س^2

المخطط الديكارتي كما مبين في شكل (٦−٦) يوضح ان ص = ٣س هو فوق ص = س^2 في الفترة [١ ، ٢]



(شكل ٦−٦)

$$\therefore \text{المساحة} = \int_{1}^{2} (3\text{س} - \text{س}^2)\, \text{د س}$$

$$= \left[\frac{3}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{1}^{2} = \frac{13}{6} \text{ وحدة مربعة}$$

ملاحظة/ ليكن ص = س^2 هو ق(س) وليكن ص = ٣س هو ع(س) فيمكن معرفة ان ع(س) ≥ ق(س) ∀ س ∈ [١ ، ٢] بدون اللجوء الى المخطط الديكارتي وذلك بمعرفة اشارة (ع(س) − ق(س)) فاذا كانت ≥ صفر فيعني ان ع(س) ≥ ق(س) واذا كانت ≤ صفر فيعني ان ع(س) ≤ ق(س) .

ويمكن ايضاح ذلك كما يلي :−

ع(س) − ق(س) = ٣س − س^2 = س(٣ − س)

اشارة س	++ +	++	---
اشارة ٣−س	----	++	+++
اشارة ع(س) − ق(س)	---	++	---

اى ع(س) − ق(س) ≥ صفر

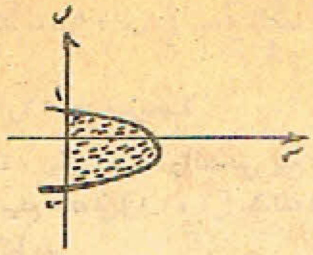
∀ س ∈ [١ ، ٢]

∴ ع(س) ≥ ق(س)

∀ س ∈ [١ ، ٢]

مثال ٤) احسب المساحة المحددة بين المنحني $س = ٢ - ص + ص^٢$ والمحور الثاني .

الحل)



(شكل ٦ـ٧)

نجد نقاط التقاطع مع المحور الثاني

وهي $ص_٢ = -٢$ ، $ص_١ = ١$

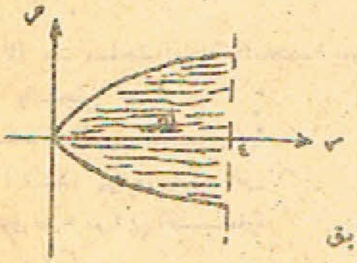
وهنا يكون س تطبيقا بدلالة ص

$\therefore$ المساحة $= \int_{-٢}^{١} (٢ - ص - ص^٢)\, د ص$

$= ٢ص - \frac{١}{٢}ص^٢ - \frac{١}{٣}ص^٣ \Big]_{-٢}^{١} = ٤ \frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

مثال ٥) جد مساحة المنطقة بين المنحني $ص^٢ = س$ والمستقيم $س = ٤$

الطريقة الاولى



(شكل ٦ـ٨)

ان العلاقة $ص^٢ = س$ لاتمثل تطبيقا بدلالة س ولكن القسم الاعلى من المنطقة هو التطبيق $ص = \sqrt{س}$ والقسم الاسفل منها هو التطبيق $ص = -\sqrt{س}$ وبتطبيق الطريقة في المثال السابق نحصل على :-

المساحة $= \int_{٠}^{٤} \left(\sqrt{س} - (-\sqrt{س})\right) د س$

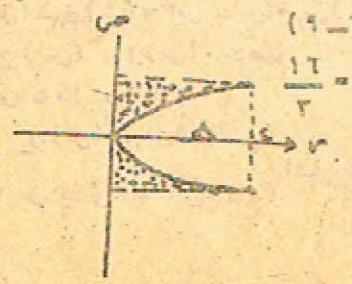
$= \int_{٠}^{٤} ٢\sqrt{س}\, د س$

$= ٢ \int_{٠}^{٤} س^{\frac{١}{٢}} د س = ٢ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٠}^{٤} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

الطريقة الثانية

ان المعادلة $س = ص^٢$ تعني ان س تطبيق بدلالة ص . ولذلك سرف نكامل بالنسبة الى ص .

المنطقة محددة بالمنحني $س = ص^٢$ والمستقيمين $ص = \pm ٢$ والمحور الثاني ومساحة المنطقة المظللة كما موضحة في شكل (٦ـ٩)



(شكل ٦ـ٩)

$= \int_{-٢}^{٢} ص^٢\, د ص = \frac{١}{٣}ص^٣ \Big]_{-٢}^{٢} = \frac{٨}{٣} - \left(\frac{-٨}{٣}\right) = \frac{١٦}{٣}$

اما المساحة المحصورة بين المستقيمات $ص = -٢$ ، $ص = ٢$ ، $س = صفر$ ، $س = ٤$ تساوي ١٦ وحدة مربعة

$\therefore$ مساحة المنطقة هـ =

١٦ ـ $\frac{١٦}{٣}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

الطريقة الثالثة

يمكن ايجاد المساحة باستخدام الطريقة الثانية مباشرة بخطوة واحدة وذلك بايجاد المساحة بين س = ٤ ، س = ص٢ وايجاد التكامل بالنسبة الى ص كما يلي :ـ

المساحة = $\int_{-٢}^{٢}$ (٤ ـ ص٢) دص = ٤ص ـ $\frac{١}{٣}$ ص٣ $\Big]_{-٢}^{٢}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

الطريقة الرابعة

بما ان المنحني متناظر بالنسبة للمحور الاول

∴ المساحة = ٢ $\int_{٠}^{٤}$ $\sqrt{س}$ دس = ٢ $\int_{٠}^{٤}$ س$^{١/٢}$ دس

= ٢ × $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ $\Big]_{٠}^{٤}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

مثال ٦) جد المساحة المحددة بين ص٢ = س ـ ١ والمستقيم ص = س ـ ٣

بحل المعادلتين س = ص٢ + ١ ، س = ص + ٣ انيا

ينتج ص = ـ١ ، ٢ و س = ٢ ، ٥ على الترتيب

الطريقة الاولى

ان س = ص٢ + ١ هي س تطبيق بدلالة ص

وكذلك س = ص + ٣ هي س تطبيق بدلالة ص

∴ المساحة بين المنحنين نحصل عليهما بايجاد التكامل بالنسبة الى ص

من ص = ـ١ الى ص = ٢

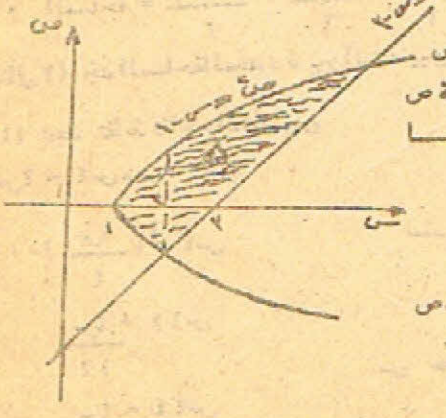
اى ان المساحة

= $\int_{-١}^{٢}$ ((ص + ٣) ـ (ص٢ + ١)) دص

= $\int_{-١}^{٢}$ (ـ ص٢ + ص + ٢) دص

= ـ $\frac{١}{٣}$ ص٣ + ½ ص٢ + ٢ص $\Big]_{-١}^{٢}$

= (ـ $\frac{٨}{٣}$ + ٢ + ٤) ـ ($\frac{١}{٣}$ + ½ ـ ٢) = ٤ ½ وحدة مربعة



(شكل ٦ـ١٠)

الطريقة الثانية

من المخطط الديكارتي شكل (٦ـ١٠) نلاحظ ان القسم الاعلى من المنطقة محدد بالمنحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س} - 1}$ والقسم الاسفل من المنطقة محدد بجزئي المنحنيين $\text{ص} = -\sqrt{\text{س} - 1}$ اذا $1 \leq \text{س} \leq 2$ و $\text{ص} = \text{س} - 3$ اذا $2 \leq \text{س} \leq 5$

$$\therefore \text{المساحة الاولى} = \int_{1}^{2} \left(\sqrt{\text{س} - 1} - \left(-\sqrt{\text{س} - 1} \right) \right) \text{د س}$$

$$= 2 \int_{1}^{2} \sqrt{\text{س} - 1}\ \text{د س} = 2 \int_{1}^{2} (\text{س} - 1)^{\frac{1}{2}}\ \text{د س}$$

$$= 2 \times \frac{2}{3} \left[(\text{س} - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{2} = \frac{4}{3} \left[(1)^{\frac{3}{2}} - 0 \right] = \frac{4}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة الثانية} = \int_{2}^{5} \left(\sqrt{\text{س} - 1} - (\text{س} - 3) \right) \text{د س}$$

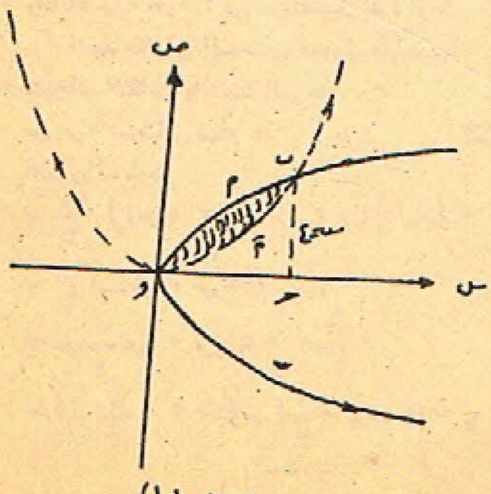
$$= \int_{2}^{5} (\text{س} - 1)^{\frac{1}{2}} - \int_{2}^{5} (\text{س} - 3)\ \text{د س}$$

$$= \frac{2}{3} \left[(\text{س} - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{2}^{5} - \frac{1}{2} \left[(\text{س} - 3)^{2} \right]_{2}^{5}$$

$$= \frac{2}{3} \times 7 - \frac{3}{2} = \frac{19}{6} \text{ وحدة مربعة}$$

$$\therefore \text{المساحة} = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال ٧) جد المساحة المحددة بين المنحنيين $\text{ص}^2 = 4\text{س}$ و $\text{س}^2 = 4\text{ص}$



(شكل ٦ـ١١)

١) نجد نقاط تقاطع المنحنيين

$\text{ص}^2 = 4\text{س}$ ، $\text{ص} = \frac{1}{4}\text{س}^2$

$\therefore \left(\frac{\text{س}^2}{4} \right)^2 = 4\text{س}$

$\frac{\text{س}^4}{16} = 4\text{س}$

$\text{س}^4 = 64\text{س}$

$\text{س}^4 - 64\text{س} = 0$

$\text{س} (\text{س}^3 - 64) = 0$

اما $\text{س} = 0$ او $\text{س} = 4$

$\therefore$ في الفترة $[0 ، 4]$

$\text{ص} = 2\sqrt{\text{س}}$

∴ المساحة و آ ب حـ = $\int_{0}^{4} 2\sqrt{س}\ دس$

$= \frac{4}{3}\left(س^{\frac{3}{2}}\right)\Big]_{0}^{4} = \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

والمساحة و حـ ب آ′ = $\int_{0}^{4} \frac{س^2}{4}\ دس$

$= \frac{1}{12}س^3\Big]_{0}^{4} = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة

∴ المساحة و آ′ ب آ = $\frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة

طريقة ثانية

$2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2 = \sqrt{س}\left(2 - \frac{1}{4}س\sqrt{س}\right)$

	صفر	٤	
اشارة $\sqrt{س}$		+++	++
اشارة $(2 - \frac{1}{4}س\sqrt{س})$		++++	---
اشارة $2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2$		++++	---

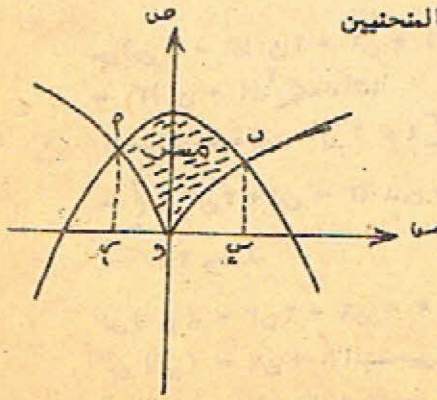
نلاحظ ان $2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2 \geq$ صفر $\forall$ $س \in [0 ، 4]$

∴ $2\sqrt{س} \geq \frac{1}{4}س^2 \ \forall\ س \in [0 ، 4]$

∴ المساحة = $\int_{0}^{4}\left(2\sqrt{س} - \frac{1}{4}س^2\right)دس$

مثال ٨) احسب المساحة المحددة بين المنحنيين

$ص = 2 - س^2$ و $ص^3 = س^2$



الحل) بحل المعادلتين انيا

نجد حدود التكامل

$س_2 = -1$ ، $س_1 = 1$

∴ المساحة =

$\int_{-1}^{1}\left(2 - س^2 - س^{\frac{2}{3}}\right)دس$

$= 2س - \frac{1}{3}س^3 - \frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}}\Big]_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}$ وحدة مربعة

٢) السافة الكلية

اذا كان $\text{س}(\text{ن})$ تطبيقا سرعيا يمثل سرعة جسم متحرك على خط مستقيم في اللحظة التي يمثلها العدد ن ٠٠٠ فان المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة $[\text{أ} ، \text{ب}] = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{س}(\text{ن})| \, \text{د ن}$

امثلة

١) اذا كان $\text{س}(\text{ن}) = ١٢ - ٣\text{ن}^٢$ يمثل سرعة جسم متحرك عند اية ثانية ن ٠٠ فجد بالوحدات المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ٤ ثواني من بدء الحركة

$\text{س}(\text{ن}) = ٣(٢ - \text{ن})(٢ + \text{ن})$

	صفر ... ٢	٢ ... ٤
اشارة ٣(٢ ـ ن)	++	— — —
اشارة ٢+ن	++	+ + ++
اشارة س(ن)	++	— — — —

المسافة في $[٠ ، ٤] =$

$= \int_{٠}^{٤} |\text{س}(\text{ن})| \, \text{د ن}$

$= \int_{٠}^{٤} |١٢ - ٣\text{ن}^٢| \, \text{د ن} =$

$= \int_{٠}^{٢} (١٢ - ٣\text{ن}^٢) \, \text{د ن} - \int_{٢}^{٤} (١٢ - ٣\text{ن}^٢) \, \text{د ن}$

$= [١٢\text{ن} - \text{ن}^٣]_{٠}^{٢} - [١٢\text{ن} - \text{ن}^٣]_{٢}^{٤}$

$=$ ٤٠ وحدة

٢) اذا كانت $\text{س}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^٢ + ٦\text{ن} + ٣$ يمثل سرعة جسم عند اية ثانية ن ٠٠ فجد ٠

١) المسافة الكلية في $[٢ ، ٤]$ ثانية

٢) تعجيله بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة

$\text{س}(\text{ن}) = ٣(\text{ن}^٢ + ٢\text{ن} + ١)$

$= ٣(\text{ن} + ١)^٢ > ٠$ دائما

$\therefore$ المسافة الكلية في $[٢ ، ٤] = \int_{٢}^{٤} \text{س}(\text{ن}) \, \text{د ن}$

$= \int_{٢}^{٤} (٣\text{ن}^٢ + ٦\text{ن} + ٣) \, \text{د ن} = [\text{ن}^٣ + ٣\text{ن}^٢ + ٣\text{ن}]_{٢}^{٤}$

$=$ ٩٨ وحدة

$\text{س}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^٢ + ٦\text{ن} + ٣$

$\dot{\text{س}}(\text{ن}) = ٦\text{ن} + ٦$ التعجيل عند اية لحظة ن

$\dot{\text{س}}(٣) = ٦ \times ٣ + ٦ = ٢٤$ وحدة/ $\text{ثا}^٢$

تماريـــن (٦ ــ ٥)

١) احسب المساحة المحددة بين ص = ٤س ــ س٢ والمحور الاول

٢) احسب المساحة المحددة بين ص٢ = س والمستقيمين ص = ١ ، س = ٨

٣) احسب المساحة المحددة بين المنحني س ص = م٢ حيث م ∈ ح ، (ثابت)
والمستقيمين س = أ ، س = ٢أ (حيث أ > صفر)

٤) احسب المساحة المحددة بين المنحني ص = س٣ والمستقيم ص = ٨ والمحور الثاني

٥) احسب المساحة المحددة بين المنحني ص = ٢س ــ س٢ والمستقيم ص = ــ س

٦) احسب المساحة المحددة بين المنحني ص = س٢ والمستقيم ص = ٣ ــ ٢س

٧ ــ احسب المساحة المحددة بين المنحنيين ص = س٢ ، ص = ½ س٢ والمستقيم
ص = ٢س

٨ ــ احسب المساحة المحددة بين المنحنيين ص = س٢/٣ ، ص = ٤ ــ ٢/٣ س٢ .

٩) احسب المساحة المحددة بين المنحنى ص = ١ + ١٠س ــ ٢س٢ والمحور الاول

١٠) احسب المساحة المحددة بين المنحنى ص٣ ــ ٦س٢ + ١١س ــ ٦ والمحصـــور
بين س = ١ ، س = ٢

١١) احسب المساحة المحصورة بين المحور الاول والمنحنى ص = ٥س ــ ٦ ــ س٢ للمنطقة
التي يكون فيها ص ≤ صفر

١٢) ميل المماس لمنحن يساوى ٦س ــ ٤س٢ فاذا مر المنحني من نقطة الاصل جـــد
معادلته وبين انه يقطع محور السينات ثانية عند س = ٣ ثم جد المساحة المحددة
بين المنحني والمحور الاول .

١٣) ليكن ق(س) = س(١ ــ س٢) برهن ان المساحة المحددة بين ومنحنى بيـــان
التطبيق ق في الفترة [١ ، ١ + هـ] حيث هـ ∈ ح++ يساوى القيمة المطلقـة
للمساحة بين المحور الاول والمنحني في الفترة [٠ ، ١]

١٤) ليكن ق (س) = ١١س ــ ٢٤ ــ س٢ يقطع محور السينات عند النقطتين
أ ، ب ولتكن ل اعظم قيمة للتطبيق ق . برهن ان
٢ل × طول أ ب = ثلاثة امثال المساحة المحصورة بين منحني بيان التطبيق
والمحور الاول والواقعة في الربع الاول .

١٥) منحن يمر بالنقطة (٠ ، ١) وميله عند اية نقطة عليه هـ هو ٣/٢ + س ــ ½ س٢
جد معادلة المنحني والمساحة المحصورة بين المنحني والمحور الاول في الفـترة
[١ ، ٢]

١٦) المنحني ص يمر بالنقطة (٣ ، ١) واذا كان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٣}{٢}$ + س ــ ½ س^{٢}

جد معادلة المنحني والمساحة المحددة بالاحداثيين السينيين لنقطتي اعظم قيمة محلية واوطا قيمة محلية لــــه ٠

١٧) جد المساحة المحصورة بين المنحني ص = س (س ــ ١) (س ــ ٢) ومحــور السينات وبين س = ٠ ، س = ٤

١٨) جد المساحة المحصورة بين المنحنيين س^{٢} + ص^{٢} = ١ و ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٤ والتي فيها ص $\geq$ صفر

١٩) جد المساحة المحصورة بين المنحنيين ص^{٢} = ١٦ س و ص = ٣ س

٢٠) جد المساحة المحددة بين المنحني ص = ٤ س ــ س^{٢} والمحور الاول في [٠ ، ٦]

٢١) جد المساحة المحددة بين المنحنيين أ ص^{٧} = س^{٨} ، أ س^{٧} = ص^{٨}

٢٢) جد المساحة المحددة بين المستقيم ص = ٢ والمنحني ص = س (٣ ــ س)

٢٣) جد المساحة المحددة بين المنحنيين ص^{٢} = س^{٣} و ص^{٢} = ٨ (س ــ ١)

٢٤) جد المساحة المحددة بين س = ١ ، ص = صفر ، ص = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ والمستقيــــم س = أ (حيث أ > ١)

٢٥) نفس التمرين (٢٤) استبدل المعادلة ص = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ بالمعادلة ص = $\frac{١}{\text{س}}$

٢٦) جد المساحة المحددة بين المنحنيين ص = س^{٢} ــ س ، ص = س ــ س^{٢}

٢٧) شبه منحرف رؤوسه الاربعة (٠ ، ٠) ، (ل ، صفر) ، (أ ، هـ) ، (أ + ب ، هـ) ٠ استخدم معلوماتك في التكامل لاثبات ان مساحته = ½ هـ (ل + ب)

٢٨) جد مساحة المثلث الذى رؤوسه (٠ ، ٠) ، هـ (أ ، ٠) ، ل (ب ، حـ) باستخدام معلوماتك في التكامل ٠

من تمرين ٢٩ الى ٣٥) ارسم مخطط ديكارتيا في كل حالة للمنطقة المتكونـــة بالمنحنيات المعطاة ثم جد مساحة هذه المنطقــة

٢٩) س = ٢ ، س = ٤ ، ص = س^{٢} ، ص = ــ س

٣٠) س = ٢ ، س = ــ ٢ ، ص = س^{٢} ، ص = ١٦ ــ س^{٢}

(٣١) س = صفر ، س = ٣ ، ص = $س^{٢}$ ، ص = ١٢س

(٣٢) ص = صفر ، ص = $\frac{٣}{٤}$ ، س = $ص^{٢}$ ، س = ص

(٣٣) س = −٢ ، س = صفر ، ص = $س^{٣}$ ، ص = −س

(٣٤) س = صفر ، س = ٣ ، ص = $\sqrt{س + ١}$ ، ص = ½ س

(٣٥) س = ١ ، س = ٢ ، $س^{٢}$ص = ٢ ، س + ص = ٤

(٣٦) س = ٠ ، س = ½ ، ص = $س^{٢}$ ، ص = $س^{٤}$

(٣٧) ص = $س^{٢}$ ، ص = $س^{٤}$

(٣٨) س = صفر ، س = ٣ ، ص = صفر ، ص = $\frac{١}{\sqrt{س + ١}}$

(٣٩) س = ١ ، س = ٢ ، $ص^{٢}$ = س

(٤٠) ص = صفر ، ص = ٢ ، س = صفر ، س = $ص^{٢}$

(٤١) ص = −١ ، ص = ١ ، س − ص + ١ = ٠ ، س = ١ − $ص^{٢}$

(٤٢) ص = ١ ، س = ص ، س$ص^{٢}$ = ٤

(٤٣) س = $ص^{٢}$ ، س = ١٨ − $ص^{٢}$

(٤٤) ص = $\sqrt{س}$ ، ص = $س^{٣}$

(٤٥) $ص^{٢}$ = ٤س + ١ ، س + ص = ١

(٤٦) ص = $س^{٢}$ + ٤س + ٢ ، ٢س − ص + ٥ = صفر

(٤٧) ص = ١ ، ص = ٢ ، س = صفر ، س = $\frac{ص}{\sqrt{٩ - ص^{٢}}}$

(٤٨) $ص^{٢}$ = ٢ − س ، ص = ٢س + ٢

(٤٩) ص = $س^{٢}$ ، ص = ٣س ، ص = ١ ، ص = ٢

(٥٠) ص = ٢س ، ٤ص = س ، ص = $\frac{٢}{س^{٢}}$ ، س $<$ صفر

(٥١) س = ١ ، س = ٢ ، $س^{٢}$ص = ١ ، ص = صفر

(٥٢) س = ١ ، س = ٢ ، ص = ½ س ، ص − $س^{٢}$ = ١

تمارين عامة

س١ـ لتكن د دائرة بالنقطة أ (٢ ، ٣) وتمس المستقيم ص = ـ١ عند النقطة ب (٠ ، ـ١) .

وليكن ل المستقيم الذى معادلته ص ـ س = ٥

فاذا كان ل ∩ د = { حـ ، هـ }

١) جد معادلة الدائرة د   ٢) برهن ان الشكل أ ب حـ د مربع

س٢ـ المثلث أ ب حـ رؤوسه النقاط أ (١ ، ـ٣) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (ـ٦ ، ـ٢)

١) جد مساحة المثلث أ ب حـ

٢) جد معادلة الدائرة التي مركزها أ وتمس ب حـ

٣) جد النسبة التي يقسم بها محور السينات المستقيم ب حـ

س٣ـ اذا كانت أ (ـ١ ، ك ـ ١) هي نقطة تماس المستقيم ٤س ـ ٣ص + ٣٢ = صفر مع الدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ ـ ١٠ص ـ ٤س + ٤ = صفر فجد احداثيي النهاية الاخرى لقطر هذه الدائرة اذا كانت أ هي احدى نهايتي هذا القطر .

س٤ـ انتخب نظاما احداثيا وظلل منطقة مجموعة النقاط في كل فيما يلي :ـ

$هـ_{١}$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ $ح^{+}$ × $ح^{-}$ ، ٢$س^{٢}$ + ٣$ص^{٢}$ ≱ ٢٧ }

$هـ_{٢}$ = { (س ، ص) : ـ١ ≤ س ≤ ٢ ، $س^{٢}$ ≤ ص < س + ٦ }

$هـ_{٣}$ = { (س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، $(س ـ ٤)^{٢}$ + $(ص + ٣)^{٢}$ < ٢٥ ، ٣س > ٢ص }

س٥ـ جد معادلة كل من المستقيمات التي في منحى المستقيم العمودى على المستقيم ٤س ـ ٣ص = ١٢ ، ثم جد معادلة المماس للدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٨س ـ ١٠ص ـ ٢٣ = صفر ، والذى ينتمي الى هذا المنحى ، ثم بين أن للمسألة حلين .

س٦ـ جد معادلة المجموعة هـ = { أ : أ نقطة مجموع مربعي بعديها عن المستقيمين س ـ ٢ص + ٥ = صفر ، ٢س + ص = صفر مساويا ٩ }

س٧ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = ١٠ ـ $س^{٢}$

لتكن هـ معادلة مجموعة كل المستقيمات التي في منحى المستقيم س + ص = ٥

وليكن كل من $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ∈ هـ بحيث أ (٢ ، ١) ∈ $م_{١}$ و

ن (٦ ، ـ٧) ∈ $م_{٢}$ وكان $م_{١}$ ∩ ق = { أ ، ب } وليكن كل من $م_{٣}$ ، $م_{٤}$

مماسان مرسومان لبيان ق عند أ ، ب على الترتيب جد مساحة الشكل المحدد بالمستقيمات الاربعة م١ ، م٢ ، م٣ ، م٤

س٨ــ مماس الدائرة س٢ + ص٢ = ٢ عند النقطة (١ ، ١) يمس بيان التطبيق ق(س) = س٢ + أ حيث أ ∈ ح جد قيمة أ

س٩ــ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) =
- ٢|س ــ ١| / (س ــ ١) + ٢ + س٢ اذا كان س ≠ ١
- ٣ عندما س = ١

١) مثل ق ديكارتيا ٢) جد المجموعة ك ⊂ ح يكون ق عندها متناقصا وبرهن ذلك ٣) هل ق مستمر عند الواحد ؟ برهن اجابتك

٤) هل توجد أصغر قيمة للتطبيق ق ؟ علل اجابتك

٥) هل توجد غاية للتطبيق عند الواحد ؟ برهن اجابتك

س١٠ــ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق (س) =
- ٢ / (س ــ ٢) اذا كان س < ٢
- [س] + ٢ اذا كان ٢ ≤ س < ٣
- س + ١ اذا كان س ≥ ٣

١) ارسم ق في المستوى الاقليدي

٢) برهن ان ق مستمر عند س = ٣

٣) هل ق قابل للاشتقاق عند ٣ ؟ برهن اجابتك

٤) برهن ان ق غير محدود من الاسفل في]١ ، ٢[

٥) برهن ان ق مستمر ∀ س ∈]١ ، ٢[

س١١ــ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق (س) =
- س٢ + ١ اذا كان س < ١
- [س] اذا كان ١ ≤ س < ٢
- ٢س ــ ٣ اذا كان س ≥ ٢

١) ارسم ق في المستوى الاقليدي

٢) اثبت ان ق مستمر عند ٢

٣) هل ق قابل للاشتقاق ق عند ٢ ؟ برهن اجابتك

٤) هل ق مستمر عند (١) ؟ برهن اجابتك

٥) هل توجد غاية للتطبيق عند ١ ؟ برهن اجابتك

س١٢ــ ليكن

ق(س) =
- ٣ ــ س اذا كان ــ٦ ≤ س < ٠
- ٣ اذا كان ٠ ≤ س < ٢
- [س / ٢] اذا كان ٢ ≤ س ≤ ٦

وليكن ل (س) = $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

١) جد اكبر منطلق لكل من التطبيقين ق ، ل

٢) مثل كلا من ق ، ل ديكارتيا

٣) جد ان امكن (٢ق ⊕ ٣ل) (٣) ، (ق ⊙ ل) (−٢) ، (ق ∘ ل) ($\sqrt{٢٠}$) ، (ق ⊖ ل) (صفر) ، (⊘) (٣)

٤ـ هل ق مستمر عند ٢ ؟ برهن اجابتك

٥ـ هل ق مستمر عند الصفر ؟ برهن اجابتك

س١٣ ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

ق (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} & \forall س > ٠ \\ س^{٢} & \text{اذا كان } -٢ < س \leqslant \text{صفر} \\ [س] & \text{اذا كان } س \leqslant -٢ \end{cases}$

١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق متناقص ∀ س > صفر

٣) برهن ان ق غير محدود من الاعلى

٤) جد قيمة $\frac{ق(-٣+هـ) - ق(-٢+هـ)}{ق(هـ)}$ اذا كان ٠ < هـ < ١

٥) هل ق مستمر عند الصفر ؟ برهن اجابتك

س١٤ ـ ليكن ق (س) = $\begin{cases} \frac{٣س - ٢}{س - ١} & \text{اذا كان } س \neq ١ \\ ٧ & \text{عند } س = ١ \end{cases}$

١) مثل ق ديكارتيا . ٢) هل ق مستمر عند ١ ؟ برهن اجابتك

٣) جد المجموعة ك ⊂ ح بحيث يكون ق عندها متناقصا ؟ برهن اجابتك

٤) هل توجد غاية للتطبيق عند ١ ؟ برهن اجابتك

س١٥ ـ ليكن ق (س) = س − [س]

١) مثل ق ديكارتيا ٢) هل ق محدود ؟ برهن اجابتك

٣) برهن ان ق مستمر عند $\frac{٣}{٢}$

س١٦ ـ ليكن ق : ح /]−١ ، ٢[⟵ ح بحيث ق(س) = ٩ − س٢

وليكن ل : ح /]−١ ، ٢[⟵ ح بحيث ل (س) = $\frac{|س - ٢|}{٢ - س}$

١) مثل كلا من ق ، ل ، ق ⊕ ل ، ق ⊙ ل ديكارتيا

٢) جد اعظم قيمة واوطأ قيمة للتطبيق ل

٣) جد الحد الاعلى للتطبيق ق ⊙ ل

٤) جد المجموعة الجزئية من منطلق ق بحيث يكون فيها ق متزايد

٥) جد المجموعة الجزئية من منطلق ق بحيث يكون فيها ق متناقص

٦) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ برهن اجابتك .

س١٧ـ اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) = { ١٦ ـ س٢ ∀س ∉ ص ؛ ـ ٩ اذا كان س ∈ ص

حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة .

١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق غير مستمر ∀س ∈ ص / { ـ ٥ ، ٥ }

٣) برهن ق مستمر عند ٥ ، ـ ٥

٤) جد غـــاق ٦ ٥) هل ق قابل للاشتقاق عند ٥ ؟ برهن اجابتك

س١٨ـ اذا كان ق : ح ⟵ ح بحيث ق (س) = { √(س٢ + ٩س) اذا كان س ∈ [ـ ٩ ، ٠] ؛ س ∀س ∈] ـ ٩ ، ٠ [

١) مثل ق ديكارتيا ٢) جد غـــاق ـ ٤

٣) هل ق مستمر عند ـ ٩ ؟ برهن اجابتك

٤) هل ق مستمر عند صفر ؟ برهن اجابتك

٥) هل ق قابل للاشتقاق عند الصفر ؟ برهن اجابتك

س١٩ـ ليكن ق : ح / { ٢ } ⟵ ح بحيث ق (س) = | س٢ ـ ٤س + ٤ | / (س ـ ٢)

جد غـــاق ٢ ، غـــاق ـ ٢

س٢٠ـ ليكن ق : ح / { ٠ ، ١ } ⟵ ح بحيث ق(س) = (س١١ ـ ١) / (س٢ ـ س)

جد غـــاق ١

س٢١ـ اذا كان ق (س) = ٩ ـ س٢ فجد

١) معادلة كل من المستقيم المماس والعمودي عليه عند النقطة التي احداثيها السيني = ـ ٣

٢) جد مساحة المثلث المحدد بين المماس والعمود عليه والمستقيم ص + ٤ = ٠

٣) جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث نقطتين متجاورتين من نقاطه منطبقتين على محور السينات والنقطتين الباقيتين على منحنى التطبيق .

٤) جد المساحة المحصورة بين بيان ق والمحور الاول

س٢٢ـ ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) =
- ٦س ـ س٢ اذا كان س > ٢
- √(٩ ـ س٢) اذا كان ـ٣ ≤ س ≤ ٢
- [س ـ ٣] ، اذا كان س < ـ٣

١) مثل ق ديكارتيا ٢) جد اعظم قيمة لـ ق
٣) برهن ان كلا من ق (٣) ، ق(٠) اعظم قيمة محلية للتطبيق ق
٤) برهن ان ق متناقص ∀ س > ٣
٥) برهن ان ق متزايد في {س : س ∈ ص ، س < ـ ٣ }
٦) برهن ان ق غير متزايد وغير متناقص في] ـ ٥ ، ـ ٤ [
٧) برهن ان ق غير محدود من الاسفل
٨) جد معادلة المماس لبيان ق عند ـ ٢ √٢
٩) جد (ق ∘ ق) (٢)
١٠) برهن ان ق غير مستمر عند ـ ٤ ، ٢
١١) هل ق مستمر عند ـ ٣ ؟ برهن اجابتك
١٢) جد ان امكن غـا ق (عند ٣) ، غـا ق (عند ـ٣)
١٣) برهن ان ق مستمر عند ـ ٥ر٣
١٤) جد حـ ⊂ ح يكون عندها ق (س) = ـ ٧
١٥) اذا كان < س $_ن$ > = < (١ ـ ن) / ن > نجد غـا < ق (س $_ن$) >
١٦) جد المساحة بين بيان ق والمحور الاول في [ـ٣ ، ٠]

س٢٣ـ احسب قيمة أ ، ب ، حـ ، د التي تجعل التطبيق ق (س) = أ س٣ + ب س٢ + حـ س + د له اعظم قيمة محلية عند النقطة (ـ ١ ، ١٠) وله نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، ـ ٦) . ثم جد معادلة المماس لبيان ق عند نقطة الانقلاب . ومثل ق ديكارتيا وجد المساحة المحددة بين بيان ق والمحور الاول في الفترة [ـ ١ ، ٣] .

س٢٤ـ ليكن ق : ح / {١} ← ح بحيث ق(س) = أس + ب / (س ـ ١)
له اصغر قيمة محلية عند النقطة (٣ ، ١٠) نجد قيم أ ، ب ومثل ق ديكارتيا .

س٢٥ـ لتكن أ هي النقطة (٣ ، ـ ١٠) ، أب ، أحـ يمسان بيان التطبيق ق (س) = س٢ ـ ٦س . عند النقطتين ب ، حـ جد احداثيي كل من ب ، حـ ومساحة المثلث أ ب حـ .

س٢٦ـ ليكن ق : [٠ ، ٢] ⟵ ح بحيث

ق (س) = {
- س   اذا كان ٠ ≤ س < ١
- ٢ ـ س   اذا كان ١ ≤ س ≤ ٢
- س ـ ٢   اذا كان ٢ < س ≤ ٣

١) برهن ان ق مستمر ، ومثله ديكارتيا

٢) بين انه يمتلك اعظم قيمة في نقطتين

٣) هل النقطة (١ ، ١) نقطة حرجة ؟ برهن اجابتك

س٢٧ـ ا) اعط مثالا لتطبيق مستمر في [ـ٢ ، ٥] ويمتلك اعظم قيمة في نقطتين واوطأ قيمة في ثلاثة نقاط مختلفة .

ب) اعط مثالا لتطبيق مستمر في [١ ، ٦] ويمتلك اعظم قيمة ∀ س ∈ [٢ ، ٤ر٥]

جـ) اعط مثالا لتطبيق مستمر في [٠ ، ٥] وله اصغر قيمة عند س = ١ و ∀ س ∈ [٢ ، ٣]

د) اعط مثالا لتطبيق مستمر معرف في [ـ١ ، ٤] وله اعظم قيمة عند س = صفر وله اصغر قيمة عند س = ٢ وانه غير قابل للاشتقاق عند س = صفر ، وعند س = ٢ .

س٢٨ـ ليكن ق (س) = (س٢ ـ ١) / (س٢ + ١)

١) برهن ان ق مستمر وجد اصغر قيمة له

٢) ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق مع مناقشة مايلي :ـ

ا) التناظر   ب) التقاطع مع المحورين   جـ) مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة   د) مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب   هـ) المستقيمات المحاذية   و) حدود التطبيق .

س٢٩. ليكن ق (س) = {
- س٢ / (س٢ + ١)   ∀ س ≥ صفر
- ـ س٢ / (س٢ + ١)   ∀ س < صفر

بين انه ليس للتطبيق اعظم قيمة وليس له اصغر قيمة ثم مثل ق ديكارتيا .

س٣٠ـ جد اعظم قيمة للتطبيق ق : [٠ ، ٢] ⟵ ح بحيث

ق (س) = {
- س + ١   اذا كان صفر ≤ س ≤ ١
- ٣ ـ س٢   اذا كان ١ < س ≤ ٢

هل ق قابل للاشتقاق عند ١ ؟ برهن اجابتك

س٢١ـ ليكن ق (س) = $\begin{cases} -س^2 + ٤س - ٢ & \text{اذا كان } ١ \leq س \leq ٢ \\ -\frac{1}{2}س^2 + ٢س & \text{اذا كان } ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$

حيث ق : [١،٣] ← ح

١) جد نقطة اعظم قيمة للتطبيق

٢) هل ق قابل للاشتقاق عند هذه النقطة ؟ برهن اجابتك

٣) جد المساحة المحددة بين بيان ق والمحور الأول .

س٢٢ـ جد احداثيي النقطة (س ، ص) التي تقع على كل من المنحنيات التالية والتي تكون المسافة بينها وبين النقطة المبينة ازاء كل منحن فيما يلي أقصر ما يمكن

ا) $س^2 - ص^2 = ١٦$ ، (٠ ، ٦)

ب) ص = $٢س^2$ ، (٩ ، ٠)

جـ) $س ص^2 = ١ - س$ ، (٠ ، ٠)

س٢٣ـ لكل مما يأتي ارسم المخطط الديكارتي الى التطبيق ق (س) .

ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق $\bar{ق}$ (س) :

١) ق (س) = $س^2 + ١$ ٢) ق(س) = $٢س^3 + ٣س^2 - ١٢س$

٣) ق (س) = $٣س - س^3$ ٤) ق(س) = س $\sqrt{س}$ ، حيث س ∋ $ح^{++}$

س٢٤ـ لكل مما يأتي جد اعظم او اوطأ قيمة محلية وارسم المخطط الديكارتي لكل من التطبيقات التالية :ـ

١) ق (س) = $(س - أ)^2$ (ب - س) حيث أ ، ب ∋ ح

٢) ص = $\frac{١}{س^2} - \frac{٢}{س^3}$ ، س ≠ ٠

٣) ص = $س^4 - ٤س^3 - ٢س^2 + ١٢س + ٣$

س٢٥ـ برهن أن ص = س $\sqrt{(٤س - س^2)}$ له اعظم قيمة عند س = ٣

س٢٦ـ جد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية ٢٤ ط سم٢

س٢٧ـ اذا كان مجموع المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة وسطح كرة نصف قطر كل منهما يساوي نق هي ٢٥٠ ط سم٢ .

جد قيمة نق عندما يكون مجموع حجميهما اعظم مايمكن

س٢٨ـ اذا كان مجموع قاعدتي وارتفاع شبه منحرف ٢٤ سم ويزيد طول احدى القاعدتين على الاخرى بمقدار ٢ سم جد ابعاده عندما تكون مساحته اكبر مايمكن .

س٢٩ـ اذا كانت النقطتين أ ، ب نهايتي قطر لدائرة ونقطة حـ تقع على محيطها فاي من العبارات التالية صادقة بالنسبة للمثلث أ ب حـ

١) اكبر مساحة للمثلث أ ب حـ عندما يكون متساوي الساقين

٢) اصغر مساحة للمثلث أ ب حـ عندما يكون متساوي الساقين

٣) محيطه أكبر مايمكن عندما يكون متساوي الساقين

٤) محيطه أصغر مايمكن عندما يكون متساوي الساقين

س ٤٠ ــ عند ما يكون كل من محيط وقاعدة مثلث معلوم احسب طول الضلعين الاخريــــن عند ما تكون مساحته اكبر مايمكن

س ٤١ ــ مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ب) فيلاقي محور السينات في نقطة حـ ومحور الصادات في نقطة هـ فاذا كانت (و) نقطة الاصل فبرهن ان اصغر قيمة لكل مما يأتي :ــ

د (حـ ، هـ) ، د (و ، حـ) + د (و ، هـ) ، د (و ، حـ) × د (و ، هـ)

حيث د التطبيق المسافي

هي على الترتيب : $(أ^{\frac{2}{3}} + ب^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ ، $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})^{2}$ ، ٤ أب

س ٤٢ ــ ليكن د (س) = (ق ⊙ ع) (س) حيث كل من ق ، ع له مشتقة اولى ومشتقة ثانية وان ق(س) > ٠ ، ع (س) > ٠ ∀ س ∋ ك فهل العبــارات التالية صادقة ؟ ان كانت صادقة برهن اجابتك وان كانت كاذبة هات مثــالا يؤيد كلامك .

١) اذا كان كل من ق ، ع اعظم قيمة محلية عند س = أ فان د له اعظم قيمة محلية عند س = أ

٢) اذا كان لكل من ق ، ع نقطة انقلاب عند س = أ فان د له نقطــة انقــلاب عند س = أ

س ٤٣ ــ سفينة أ تبعد ١٥ ميل شرق الميناء حـ وتتحرك نحوه بسرعة ٢٠ ميل/ ساعــة . والسفينة ب تبعد ٦٠ ميل جنوب حـ وتتحرك نحوه بسرعة ١٥ ميل/ ساعــة . اثبت ان البعد بين السفينتين يكون اقل مايمكن بعد مضي $١ \frac{١١}{١٢}$ ساعة .

س ٤٤ ــ ق(س) = ١٢س ــ س٣

جد المناطق التي يكون فيها ق متزايدا اومتناقصا ثم جد ان امكن اعظم واوطأ قيمة لـ ق في] ــ٥ ، ٥ [،] ــ١ ، ٣ [،] ــ٢ ، ٢ [

س ٤٥ ــ ليكن ق : [٠ ، ١٦] ⟵ ح بحيث ق(س) = $\sqrt[3]{(٨ - س)^{2}}$

١) جد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة

٢) جد مناطق التحدب والتقعر

٣) جد ان امكن اعظم واصغر قيمةٍ للتطبيق

٤) مثل ق ديكارتيـا .

س ٤٦ ــ ا ب حـ د مربع طول ضلعه ٢٠ سم فرضت النقطتان هـ ، ق على ب حـ ، حـ د على الترتيب بحيث ان حـ ق = ٢ب هـ اثبت ان اصغر مساحة للمثلث = ٧٥ سم٢ .

س٤٧ ــ لوحة اعلانات مستطيلة الشكل مساحتها ٢م٢ . اقتطع من حافتها على موازاة اضلاعها قطعة بعرض ١٥ سم لكل من قاعدتيها العليا والسفلى وبعرض ١٠ سم لكل من ضلعيها الاخرين اوجد بعدى اللوحة بحيث مساحة الجزء الباقي بعد الاقتطاع اكبر مايمكن .

س٤٨ ــ جد قيم التكاملات التالية :ــ

١) $\int (\text{٤س}^{٣} + \text{٣س}^{٢} + \text{٢س} - \text{ط}) \, \text{دس}$

٢) $\int \left(\dfrac{\text{١} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} \right)^{\text{٢}} \text{دس}$

٣) $\int (\text{١} + \text{٢س}^{٣})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} \, \text{س}^{٢} \, \text{دس}$

٤) $\int \dfrac{(\text{ع} + \text{١}) \, \text{دع}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{ع}^{٢} + \text{٢ع} + \text{٢}}}$

٥) $\int \text{٥٤}(\text{٤س}^{٢} - \text{١}) \sqrt[\text{٥}]{\text{٤س}^{٣} - \text{٣س} + \text{٧}} \, . \, \text{دس}$

٦) $\int \dfrac{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢} + \text{١}}{\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{١}} \, \text{دس}$

س٤٩ ــ جد القيمة العددية لكل ما يلي :ــ

١) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{س}^{٢} \left(\text{١} - \dfrac{\text{٢}}{\text{س}^{٤}} \right) \text{دس}$

٢) $\int_{\text{١}}^{\text{٨}} \left((\text{٢س})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} + \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} \right) \text{دس}$

٣) $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\sqrt{\text{٢}} - \sqrt{\text{٢س}})^{\text{٢}} \, \text{دس}$

٤) $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{س} \sqrt{\text{١} + \text{٣س}^{٢}} \, \text{دس}$

س٥٠ ــ جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث سرعته معرفة بموجب القانون $\text{س}(\text{ن}) = \text{٣ن}^{٢} - \text{٢ن}$. جد المسافة الكلية التي يقطعها هذا الجسم في الفترة [٠ ، ٤]

س٥١ ــ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $\text{ت}(\text{ن}) = \text{٢ن} + \text{٣}$ فاذا كانت $\text{س}(\text{١٠}) = \text{١٥٠}$ ق/ ثا حيث س(ن) سرعته في اية لحظة . جد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥]

س٥٢ ــ جسم يبدأ حركته من السكون بتعجيل قدره (٣٠ ــ ٦ن) ق/ ثا . متى واين يقف الجسم مرة اخرى .

س٥٣ـ تحركت نقطة مادية على خط مستقيم وبتعجيل ثابت فكانت سرعتها بعد مضي ٥ ثا من بدء حركته ٤٠ سم/ ثا وسرعتها بعد مضي ٨ ثا من بدء الحركة ٥٢ سم/ ثا ٠ احسب باستخدام التكامل التعجيل والسرعة الابتدائية ٠

س٥٤ـ قذفت كرة راسيا الى الاعلى من نقطة على سطح الارض وبسرعة ابتدائية قدرهـــا ٩٦ ق/ ثا ٠ جد باستخدام التكامل (١) السرعة والمسافة في اية لحظة ن ٠
(٢) اقصى ارتفاع تصل اليه الكـرة ٠

س٥٥ـ جسم يتحرك على خط مستقيم وبتعجيل = ٤م/ ثا٢ عند كل (ن) حيث (ن) يمثـل الزمن بالثواني ٠ وكانت سرعته = ٣م/ ثا ٠ وكانت المسافة = ٩م في نهاية الثانيـة الاولى ٠ جد المسافة المقطوعة في الثانية الرابعة ٠

س٥٦ـ ليكن ق تطبيق كثير الحدود ومن الدرجة الثالثة ويحقق الشروط التاليـة :ـ
١) ق(٢) = ٠ ، ق(١) = ٢ ، ق(٠) = ٤ ، ق(ـ ٢) = ٠
٢) قَ(س) > ٠ ، ∀س ∈ ح /[٠ ، ٢] ، قَ(س) < ٠ ∀س ∈]٠ ، ٢[
٣) قً(س) > ٠ ∀س > ١ ، قً(س) < ٠ ∀س < ١
أ) مثل ق ديكارتيا (ب) جد بيان ق (جـ) جد المساحة بين بيان ق والمحور الاول والمستقيمين س = ـ٣ ، س = ٣ ، (د) جد اعظم واوطا قيمـة لـ ق في [ـ١ ، ٣]

س٥٧ـ ليكن ق : ح / { ٠ } ⟵ ح بحيث ق (س) = ـ٤ س ـ $\frac{٢}{س^٢}$

١) برهن ان ق مستمر عند ١ ثم جد غـــاق
$_{١}$

٢) جد معادلة المماس لبيان ق والعمود على المستقيم ٢س = ٧ص

٣) جد مناطق التزايد والتناقص والتحدب والتقعر والنقاط الحرجة واعظم قيمة محلية واوطا قيمة محلية ونقاط الانقلاب ان وجدت •

٤) جد نقطة او نقاط تقاطع ق مع المحور الاول

٥) مثل ق ديكارتيا

٦) جد وبصورة تقريبية ق (٠٫٩٩٨)

٧) جد ∫ ق (س) د س

٨) جد المساحة بين بيان ق والمحور الاول والمستقيمين س = ١ ، س = ٣

س٥٨ـ اذا كان ق : ح ⟵ ح

بحيث ق(س) = { س ∀ س < ١ ؛ س٢ + آس + ب ∀ س ≥ ١

وكان ق قابلا للاشتقاق عند ١ فجد قيم أ ، ب

س٥٩ـ جد بصورة تقريبية قيمة $\sqrt{٢٦}$ + $\sqrt[٣]{٢٦}$

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة •

س٦٠ـ منحن يمر بالنقطة (٢ ، ١) وميله عند اى نقطة (س ، ص) هو ٢س٢ + ٥س ـ ٣

جد كل من اعظم واصغر قيمة محلية له •

س٦١ـ جد معادلة المنحني الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٢) اذا كان ميل المنحني لاية نقطة (س ، ص) يساوى $\frac{٢}{\quad}$ هل هذا المنحني يمثل تطبيق ؟ ولماذا ؟

س٦٢ـ منحن يمر بالنقطة (١ ، ٦)^{ص} وميله عند اى نقطة = $\frac{٣س^٢ - ٥}{٣ص}$ • جد معادلة المنحني وهل يمثل تطبيق ؟ ولماذا ؟

س٦٣ـ اذا علمت ان ق′(س) = س٢ ـ ٢س + ٢ وان الاحداثي الصادى لنقطة الانقلاب = ـ٢ جد ق(س)

س٦٤ـ اذا كان ميل المماس لمنحن عند اية نقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\text{٢ ـ س}}{\text{ص + ٣}}$ برهن ان المنحني يمثل دائرة . اذا كان يمر بالنقطة (٢ ، ١) ثم جد مركزها ونصف قطرها واحسب طول المماس للدائرة من النقطة (٦ ، ٠)

س٦٥ـ ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق ق (س) = ٦ ـ س ـ $\text{س}^{\text{٢}}$

ثم جد المساحة المحصورة بين بيان التطبيق والمحور الاول وبين المستقيمين س = ـ٣ ، س = ٢

س٦٦ـ اذا كان ق َ(س) = ٢س ـ ٢ وان اصغر قيمة محلية له = ـ٤ جد ق(س)

ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق واوجد المساحة المحصورة بين بيان ق والمحور الاول .

س٦٧ـ اذا كان ق ً (س) = ٦س لتطبيق ما . وكانت ق (ـ $\sqrt{\text{٣}}$) = ٦ $\sqrt{\text{٣}}$ اعظم قيمة محلية . جد ق (س) .

ثم ارسم المخطط الديكارتي للتطبيق واوجد المساحة المحصورة بين بيان ق والمحور الاول في الفترة [ـ٤ ، ٤] .

س٦٨ـ ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{١}}{\text{س + ٣}} & \forall\ \text{س} < \text{ـ٣} \\ \frac{\text{ـ١}}{\text{س ـ ٣}} & \forall\ \text{س} > \text{٣} \\ \frac{\text{٢}}{\text{س + ٣}} & \forall\ \text{س} \in [\text{١ ، ٢}[\\ |\text{س}| & \forall\ \text{س} \in [\text{ـ١ ، ١}] \cup \{\text{ـ٣ ، ٣}\} \\ [\text{س}] & \forall\ \text{س} \in]\text{ـ٣ ، ـ١}[\end{cases}$$

١) مثل ق ديكارتيا

٢) بين ان ق محدود من الاعلى وجد اعظم قيمة للتطبيق ق

٣) برهن ان ق غير محدود من الاسفل

٤) جد (ق ∘ ق ∘ ق) (ـ٤)

٥) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ ولماذا ؟

س ٦٩ — ليكن ق : ص ← ح بحيث ق(س) = { |س٢ − ٤| ∀ س ∈ [−٢ ، ٢] ؛ س ∀ س > ٢ ؛ −س ∀ س < −٢ }

١) مثل ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق متزايد ∀ س > ٢

٣) جد (ق ∘ ق) (−٥)

٤) جد اوطا قيمة ل (ق)

٥) برهن ان ق غير محدود من الاعلى

٦) هل ق قابل للاشتقاق عند −٢ ، ٢ ؟ برهن اجابتك

س ٧٠ — ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س/٢ − [س/٢]

١) مثل ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق محدود ٣) برهن انه غير مستمر في كل عدد صحيح زوجي

س ٧١ — ليكن ق : ح ← ح بحيث ق(س) = س٢ / (س٢ + ١) برهن ان ق محدود

س ٧٢ — ليكن ق :]−٥ ، ٤[← ح بحيث ق(س) = |س − ٢|

وليكن ع :]−٥ ، ٤[← ح بحيث ع(س) = |س + ٣|

وليكن ل :]−٥ ، ٤[← ح بحيث ل (س) = س

١) مثل كلا من ق ، ل ، ع ، ق ⊕ ع ، ق ⊕ ل ، ق ⊙ ل ، ع ⊙ ل

ع ⊕ ل ، ع ⊙ ل ديكارتيا . وبرهن ان كلا منها محدود

٢) مثل (ق ⊕ ل) ⊕ ع ديكارتيا وجد اعظم قيمة له

٣) جد ان امكن (ق ⊕ ل) (٢) ، (ق ⊖ ع) (−١)

(ق ⊙ ل) (−٣)

٤) برهن ان ق ⊕ ع مستمر .

س ٧٣ — ليكن ق : ح′ ← ح بحيث ق(س) = { |س٢ + ١| ∀ س ∈]−٣ ، ٠] ؛ −٢ ∀ س ∈ ح′ /]−٣ ، ٠] }

١) مثل ق ديكارتيا

٢) جد اوطا قيمة ل (ق)

٣) برهن ان ق متزايد في]−١ ، ٠]

٤) جد ان امكن (ق ∘ ق) (−٣٫٥)

س٧٤ — ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =
- $س^{٢} - ٤$ ∀ س > −١
- $٤ - س^{٢}$ ∀ س ≤ −١

وليكن ل : ح ⟵ ح بحيث ل(س) =
- $س^{٢} - [س]$ ∀ س ≥ −١
- $س^{٣} - س^{٢} + ١٢$ ∀ س < −١

١) مثل ق ديكارتيا ٢) مثل ق ⊕ ل ديكارتيا
٣) برهن أن ق غير محدود من الاعلى
٤) هل يتناظر ق مع المحور الثاني في [−١ ، ١] ولماذا ؟
٥) هل ق ⊕ ل محدود من الاسفل ؟ ولماذا ؟
٦) اذا كان ق ⊕ ل = د نجد (د ∘ د) (−٢ ½)
٧) جد ك ⊂ ح يكون عندها ق(س) = ١ ، ∀ س ∈ ك
٨) جد (٢ق) . (٣ل) ⊕ ($\frac{-٣}{٢}$)
٩) برهن ان ق ⊕ ل متناقص في {س : س ∈ ص ، س ≤ −١}

س٧٥ — ليكن ق :]−٥ ، ٤[⟵ ح بحيث ق(س) = $٢س - س^{٢}$
١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق محدود ٣) جد اعظم قيمة للتطبيق ق ان امكن ٤) جد ك ⊂ منطلق ق يكون عندها ق متزايد وبرهن ذلــك
٥) جد (ق ∘ ق) (−٢) ان امكن ٦) جد س ∈ منطلق ق وتحقق العلاقة ق (س) = −٢٤

س٧٦ — ليكن ق :] −٢ ، ٤[⟵ ح بحيث ق(س) = $س^{٢} + ٤$
وليكن ل : [−٢ ، ٤] ⟵ ح = ل(س) = $-٩ - س^{٢}$
١) مثل ق ديكارتيا ٢) برهن ان ق محدود
٣) جد ان امكن (ق ∘ ق) (−١)
٤) جد ك ⊂ منطلق ق يكون ق عندها متناقصا وبرهن ذلك
٥) جد اعظم واوطا قيمة ل(⊖ ٢ق)
٦) مثل (٢ل) ديكارتيا ٧) مثل ق ⊕ ل ديكارتيا
٨) جد اعظم قيمة ل . (ق ⊕ ل)
٩) برهن ان ق ⊕ ل غير متزايد وغير متناقص

س٧٧ — ليكن ق : ح ⟵ ح بحيث ق(س) =
- |١ − س| ∀ س ∈]−١ ، ٢]
- [س + ٣] اذا كانت −٢ ≤ س ≤ −١
- س + ٣ ∀ س < −٢
- $\frac{-٣}{س - ٢}$ ∀ س > ٢

١) مثل ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق غير محدود من الاسفل
٣) جد اوطا قيمة لـ (ق ⊖ ٢ق)
٤) برهن ان ق متزايد ∀س > ٢
٥) جد (ق ○ ق ○ ق) (−٥ر١)
٦) جد س ∈ ح بحيث ق (س) = −١٠
٧) هل ق قابل للاشتقاق عند س = ١ ، س = −٢ ؟ برهن اجابتك .

ظلل كلا من المجموعات التالية في المستوى الاقليـــدى

س٧٨ــ $ه_{١}$ = {(س ، ص) : (س ، ص) ∈ ح × ح ، ٢ص < ٢س ، س ∈ [−٢ ، ٣] }

$ه_{٢}$ = {(س ، ص) : س٢ + ص٢ > ٢٥ ، س − ص < ١}

$ه_{٣}$ = {(س ، ص) : ص < س٢ − ٩ ، س > ص }

س٧٩ــ دائرتان متماستان من الداخل عند النقطة ب • والمماس المشترك لهمـــا عند نقطة ب هو ٣ص + ٤س + ح = صفر ، فاذا كان مركز احداهمـــا هو النقطة (٦ ، ٨) ونصف قطر الثانية ٣ وحدات فما معادلة كل مـــن الدائرتين •

س٨٠ــ اثبت ان النقطة أ (−١ ، ١) تقع خارج الدائرة (س + ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤ ثم جد معادلتي المماسين المرسومين للدائرة من النقطة أ • واذا كانت نقطتا التماس هما ب ، حـ فاثبت ان أ ب م حـ مربع • حيـــث م مركز الدائرة •

س٨١ــ اذا كان المستقيم أ ب الذى معادلته ص = −١ مماسا للدائرة س٢ + ص٢ + ٦س + ١٠ص + ١٨ = صفر عند النقطة ب • وكان أ ب م حـ مربع حيث م نقطة مركز الدائرة فجد معادلة المماس المرسوم للدائرة من نقطة أ

س٨٢ــ اثبت ان الدائرتين (س + ١)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٩٨ ، س٢ + ص٢ − ٢٠ص + ١٢س − ١٥٢ = • متماستان ثم جد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما • واذا كان المماس هذا مماسا للدائـــرة أس٢ + أص٢ − ٤ب س = • فجد قيمة أ ، ب •

س٨٢ـ ليكن ق : ح / {−١ ، ١} ⟵ ح بحيث ق(س) = س^{٢} − $\dfrac{\text{١ − س}^{٢}}{|\text{١ − س}^{٢}|}$

١) مثل ق ديكارتيا

٢) برهن ان ق متناظر مع المحور الثاني

٣) هل تمتلك ق اعظم قيمة ؟ ولماذا ؟

٤) هل تمتلك ⊖ ق اعظم قيمة ؟ ولماذا ؟

٥) هل توجد غاية للتطبيق ق عند س = ١ ، س = −١ ؟ برهن اجابتك

س٨٤ـ ليكن ق : ح /]−١ ، ٢[⟵ ح بحيث ق(س) = ٤ + س^{٢}

وليكن ل : ح /]−١ ، ٢[⟵ ح ، ل(س) = $\dfrac{|\text{س − ١}|}{\text{١ − س}}$

١) مثل ق ، ل ديكارتيا

٢) مثل ق ⊕ ل ديكارتيا ٣) برهن : ق ⊙ ل = ق ⊕ ل

٤) جد اوطأ قيمة للتطبيق ق ٥) جد الحد الادنى للتطبيق ق ⊕ ل

٦) جد ك ⊂ منطلق ق بحيث يكون ق فيها متناقصا وبرهن قولك

٧) هل يتناظر ق مع المحور الثاني ؟ ولماذا ؟

المساحات والحجوم وبعض القوانين الرياضية

١- المستطيل مساحته = الطول × العرض

محيطه = ٢ (الطول + العرض)

٢- المربع مساحته = مربع ضلعه

محيطه = ٤ × طول الضلع

٣- المعين مساحته = طول قاعدته × ارتفاعه

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طول قطريه

٤- المثلث مساحته = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × مربع الضلع (اذا كان متساوي الاضلاع)

٥- شبه المنحرف مساحته = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع

محيطه = مجموع اضلاعه

٦- الدائرة مساحتها = نق^{2} ط

محيطها = ٢ نق ط

٧- المنشور حجمه = مساحة القاعدة × الارتفاع

ومن اشكاله متوازي السطوح

مساحته الجانبية = محيط مقطعه القائم × طول حرفه

= محيط القاعدة × الارتفاع (اذا كان قائماً)

٨- الاسطوانة حجمها = مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحتها الجانبية = محيط مقطعها القائم × طول مولدها

= محيط القاعدة × الارتفاع (اذا كانت قائمة)

٩- الهرم والمخروط حجمه = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × ارتفاعه

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × الارتفاع الجانبي

" " للمخروط " = $\frac{1}{2}$ " " × المستقيم المولد

حجم الهرم الناقص = $\frac{1}{3}$ ع (ق$_1$ + ق$_2$ + $\sqrt{ق_1 ق_2}$) حيث ان

ق$_1$، ق$_2$ مساحتي القاعدتين ع ارتفاعه

١٠- الكرة ح = $\frac{4}{3}$ نق^{3} ط

س = ٤ نق^{2} ط